Magazine

CARTAPACIO

DE CIENCIAS

Conocimiento Vol_07 Talento

NUESTRO STAFF

EDITA

AFCAL

Asociación para el Fomento del Conocimiento en Almonte.

COLABORA

Ayuntamiento de Almonte

FOTOGRAFÍAS

Ilustración de portada:
Rocío Aragón Rodríguez

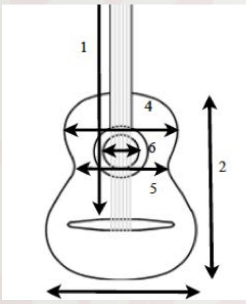
Edición Digital
Eco-compromiso con la naturaleza.
Editada en Almonte, Octubre de 2020.

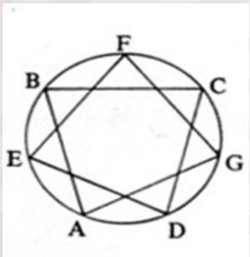
Financiado por : Subvenciones para Colectivos Locales 2019, (Ayuntamiento de Almonte.)

ISSN 2531-0895

www.afcal.org // info@afcal.es

CONTENIDOS





PRESENTACIÓN

La 7ª edición del Magazine CARTAPACIO DE CIENCIA está enmarcada bajo el subtítulo "Música y Matemáticas". El aunar arte y ciencia, en concreto, música y matemáticas viene de muy atrás. No en vano, la música era una parte de la enseñanza de las matemáticas en la antigua Grecia. En la actualidad se está potenciando la relación entre ambas disciplinas, lo que proporciona nuevas líneas de investigación y fomenta metodologías docentes multidisciplinares.

La mayoría de los artículos de esta edición están basados en las conferencias impartidas en las I Jornadas Nacionales de Matemáticas y Música (IJNM2)[1] , celebradas el 5 de octubre de 2019 en Almonte. Podemos decir que nos sentimos orgullosos de haber podido comenzar este proyecto en la Ciudad de la Cultura de Almonte y esperamos tenga continuidad en años venideros. El evento tuvo su origen en una conversación con el profesor Vicente Liern, experto en el tema, y la etnomusicóloga Inmaculada Marqués. Hemos participado en varias ediciones del congreso internacional de Matemáticas, Computación y Música (Mathematics and Computation in Music, MCM) que, por cierto, tendrá lugar en Atlanta, USA, en 2021, organizado por otra de nuestras conferenciantes, la profesora Mariana Montiel. Nos planteamos entonces la posibilidad de iniciar la versión nacional en Almonte, donde el Ayuntamiento y la asociación AFCAL no escatimaron esfuerzos para colaborar con la organización.

Las IJNM2 son las primeras que se celebran en España y se centraron en el tema "Educación Matemática", por lo que expertos del área mostraron cómo usar la música para introducir conceptos matemáticos en distintos niveles educativos. Las Jornadas estuvieron planteadas a nivel divulgativo y, por tanto, dirigidas a todos los interesados en Ciencia, Música y Cultura en general, y a profesores de Matemáticas y de Música de todos los niveles educativos, en particular. Participaron un gran número de profesores de distintos centros educativos de las provincias de Huelva y Sevilla (donde las Jornadas estuvieron homologadas por el CEP, Centro del Profesorado), además de miembros de asociaciones musicales de Almonte e interesados locales. Como colofón de las Jornadas disfrutamos de un concierto de flamenco en el Museo de la Villa[2].

Comenzaremos esta edición reproduciendo una semblanza que realizó el día de la mujer y la niña en la Ciencia nuestra compañera Rocío López en honor a nuestra querida Doña Antoñita, Antonia Báñez, maestra de matemáticas de muchas generaciones de Almonte y que asistía con entusiasmo e interés a las primeras reuniones para las Jornadas que organizábamos en el Casino de Almonte. Recuerdo con mucho cariño cuando nuestra querida maestra me preguntaba cada vez que me veía "...¿Cómo va eso prenda?...", refiriéndose a la organización de las Jornadas. Vaya esta edición del Cartapacio dedicada a su memoria, pues es bien sabido la importancia de la labor de los maestros, casi nunca bien reconocida, crucial para transmitir a los más jóvenes la cultura y educación necesarias para vivir y convivir en sociedad. Permítanme estos tres versos a modo de íncipit de esta edición:

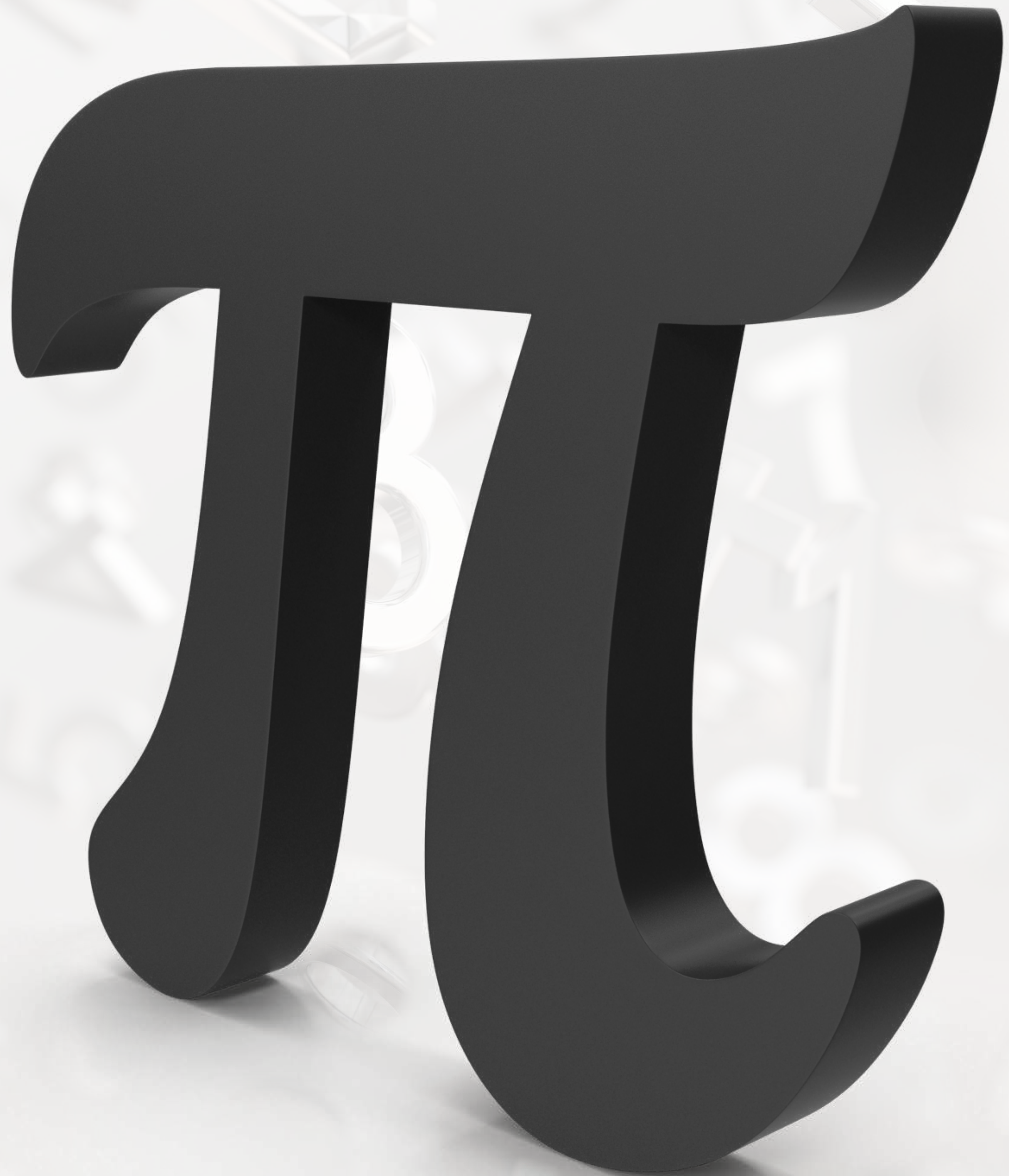
...Con sus matemáticas, su bondad y su sonrisa,
inundaba de luz las aulas del Pocito,
siempre en nuestros corazones, Doña Antoñita...

José Miguel Díaz Báñez
Editor del 7º Magazine Cartapacio de Ciencias .

[1] http://alojamientos.us.es/galgo/jmm.html
[2] https://www.youtube.com/watch?v=238tCf5Mls0

C O N T E N I D O S

Música y Matemáticas



A NUESTRA ANTOÑITA BÁÑEZ

Buenas tardes a todos. Permitidme antes de nada agradecer a Francis la oportunidad que me ha dado de poder estar aquí hoy para poder expresar algo que, casi me atrevería a decir, me encontraba en la necesidad de hacer y compartir. Y orgullosa me siento de poder hacerlo, delante de todos vosotros, hoy 11 de febrero, en el que se celebra el Día de la mujer y la niña en la Ciencia.

Os preguntaréis qué hago yo aquí. Pues bien, yo me llamo Rocío López, soy mujer y me dedico a la Ciencia, concretamente a las Matemáticas, que es la cuna donde se mece cualquier ciencia. Pero el motivo de que yo esté aquí leyendo ésto no es precisamente ese, sino se debe a una **persona**, para mí **muy especial**, y que ha tenido muchísimo que ver en que yo llegase a dedicarme a la docencia de las Matemáticas:

Hablo, por supuesto de nuestra querida **Antoñita Báñez**.

Hablar de Mujer y Ciencia en Almonte nos lleva necesariamente a hablar de ella y a ella van dedicadas estas líneas, redactadas desde el corazón y con el más profundo respeto hacia ella y a su familia.

Yo he tenido la suerte de disfrutarla profesionalmente en sus dos versiones: como **maestra** y, al cabo de los años, como **compañera**. Y tengo que decir que, si fascinante era como lo primero, más admirable e íntegra si cabe era como compañera, aunque a mí me costaba considerarme su igual, y me resultaba muy difícil dejar de llamarla con el "doña" por delante. Oficialmente fui su alumna durante los tres últimos cursos de la entonces llamada E.G.B. y 10 años más tarde pudimos compartir poco más de un curso como compañeras de trabajo en el instituto IES Doñana, antes de su jubilación en diciembre de 2011.

Con la misma intensidad que yo sentía **admiración** por ella al ver que compartíamos departamento, lugar de trabajo y experiencias, ella se sentía igualmente **orgullosa** de hacerlo con una de sus alumnas, que había decidido, en gran parte gracias a ella, seguir sus pasos en lo profesional. También durante ese periodo yo me seguía considerando su alumna y sigo haciéndolo cada día, pues ella me sigue nutriendo de recursos, ideas y experiencias que me inspiran sus recuerdos como maestra.

Yo, como tantas otras generaciones de niños almonteños, fui una de las afortunadas en poder vivir y experimentar lo que ella provocaba con sus clases, su actitud implicada y comprometida, su garra y su entusiasmo en cada una de ellas. Sus clases eran en toda regla como era ella: **APASIONADAS**. Y para darse cuenta de ello, sólo había que observar cómo terminaba la jornada: acalorada y arremangada en pleno invierno, con manchas de tiza por toda la ropa y en el puño de su mano izquierda, de haber estado borrando mientras con la derecha no perdía la escritura, sin pudor en "enfangarse" en su tarea hasta el fondo.

Ella era una **caja de emociones** en el aula:

Por un lado, mostraba entusiasmo y satisfacción cuando todo salía bien: Se le llenaba la boca presumiendo públicamente de lo bien que lo había hecho "Fulanito" o paseando orgullosa de clase en clase por todo el colegio enseñando el cuaderno de "Menganita".

Pero también estaba la otra versión, la de disgusto, indignación e incluso cabreo cuando algo no salía como ella esperaba o no le dábamos el 100% que ella nos exigía y que sabía que éramos capaces de dar; Era entonces cuando nos dedicaba expresiones como: "***¡Leche, puñetas! ¡¡Lechuga!!*** ". Lo mismo nos reñía que nos invitaba a merendar a su casa. Ahora lo recordamos con una sonrisa y de la manera más entrañable, porque más que alumnos para ella éramos su responsabilidad, sus niños, de los que quería sentirse orgullosa al verlos prosperar en su formación y educación...

En los últimos años en la Educación Matemática se manejan **conceptos** que creemos novedosos y que se acaban de descubrir, poniéndose de moda en las noticas e incluso en documentales y redes sociales... Pero la verdad es que Antoñita ya era pionera en muchos de ellos. Os pongo algunos ejemplos:

- Ahora todo docente que se precie quiere poner en práctica la **Gamificación** en el aula, lo que viene siendo aprender jugando. Pues precisamente eso lo teníamos más que asumido con Doña Antoñita: Allí donde había una operación combinada con paréntesis, ella lo transformaba en una historia donde la protagonista era ¡¡una madre que metía a sus hijos en la bañera!! Que era en aquellos entonces, lo que ocupaba el resto de su día tras acabar las clases: dedicarse a sus hijos. Y así acabábamos todos, sacando niños del baño y aprendiendo la jerarquía de las operaciones.

¿Y si había que aprender a operar con radicales? Pues una fiesta nos montaba, donde cada número tenía que ponerse su sombrerito para poder entrar en la fiesta y dejarlo donde estaba si salía de ella.

- Se habla también de un concepto moderno, denominado **"Flipped Clasroom"**, en inglés significa clase invertida. Ella lo ponía en práctica también con nosotros: nos repartía los apartados de un tema para que nos lo preparáramos en casa y luego lo explicáramos en clase al resto de compañeros, haciendo nosotros de profesores. No se nos olvidará nunca, como mínimo, la parte que nos tocó explicar a cada uno. Incluso, a veces, nos repartía los exámenes intercambiados y los corregíamos nosotros mismos, siguiendo sus indicaciones. Eso nos enseñaba también en el camino valores como compañerismo, justica, sensatez, honradez, etc.

- La perseguida y tan demandada en los centros **"Atención a la diversidad"** no suponía para ella problema alguno: Nos hacía competir y esforzarnos en superarnos a nosotros mismos colocándonos de manera estratégica en la clase, ordenados en función de la nota que obteníamos. ¿El reto? Llegar hasta el primer pupitre junto al suyo: ¡ese sería el de la nota más alta!

- Nos enseñaba a trabajar la rapidez en las destrezas de cálculo mental y resolución de problemas, con aquello de: "Los 5 primeros que lo resuelvan bien tendrán un positivo". ¡¡Eso era un subidón de adrenalina!!

- Y en cuanto a los **recursos** que utilizaba, ella disponía de los más variados: desde el propio libro de texto, el periódico del día, un ticket de la compra o incluso a veces, el cuaderno de su hija Irene, que aunque ya estaba en el instituto, ella aprovechaba para adelantarnos la materia si se lo podía permitir con unos cuantos. Recuerdo que nos enseñó con éxito la teoría de logaritmos en 8º de EGB, algo impensable hoy en día en el nivel correspondiente.

- Con ella batíamos récords en resolver ejercicios en una misma tarde, (recuerdo haber tenido listas de veintitantos de un golpe), y sin caer en trauma alguno ¡todos hemos sobrevivido! Con ella participábamos en concursos de lógica y juegos de ingenio en el colegio, íbamos a las Olimpiadas de Thales, descubrimos la Geometría, manejando la caja de poliedros por primera vez. Aprendimos a trazar paralelas, perpendiculares, medir ángulos. Aprendimos a manejar los Rotrins, la tinta china y hasta descubrimos la famosa trampa de la **"Teoría del punto gordo"**.

- Con ella aprendimos muchas cosas, no sólo de Matemáticas, sino otras muy útiles para nuestra vida cotidiana, como razonar, expresarse de manera coherente, trabajar en equipo, tener capacidad crítica... Como ella decía, cosas **"de lógica y de cajón".**

Al cabo de los años, durante el tiempo que compartimos siendo **compañeras** en el instituto pude comprobar su integridad y su sensatez, siendo una verdadera profesional y educadora en todos los sentidos. Ella no se dejaba intoxicar por la inútil burocracia, pero el papel y el boli eran su herramienta indispensable y su programación el cuaderno de cualquiera de sus alumnos. Ha tenido siempre clara su escala de prioridades: el alumno antes que el ordenador, el alumno antes que el papel, el alumno antes que la inspección. El alumno siempre por delante de todo. Esto es precisamente lo que la hace grande en su profesión.

Y en lo **personal**, ¿qué decir de ella? Todos los que tuvimos la suerte que conocerla sabemos lo especial y lo cariñosa que era: ¿Cómo puede alguien expresar tanto en un simple saludo?

- *"¡Bonita mía!"*

Un halago y un posesivo, indicando que ya eras algo suyo.

Ella era entrañable. Ella era encantadora. Ella era **DE VERDAD**.

Nosotros seguiremos nombrándote y disfrutando mientras haya alguien que aprenda a admirar las

Matemáticas o un acertijo despierte su curiosidad …

Y yo por mi parte seguiré inspirándome en sus recuerdos, jugando con los números, creando poesías sobre ellos, haciendo teatros matemáticos con música y agradeciendo poder disfrutar de este precioso trabajo. Ella me enseñó a disfrutar de las Matemáticas con quienes son los mejores compañeros de trabajo y los mejores maestros: los alumnos.

También ella me enseñó a exigir soltura, destreza, rigor y buena expresión matemática. Porque se pueden conseguir ambas cosas, y la mejor metodología para ello es el cariño y la dedicación.

Tú me enseñaste a hacerlo, ¡te lo debo a ti, maestra!

Sólo me falta decir que me hubiese encantado leer estas líneas observando su sonrisa emocionada desde el público, disfrutando de su reconocimiento y terminar dándole un abrazo fuerte de agradecimiento por todo lo que nos ha enseñado y querido, mientras que seguramente escucharía de su boca un *"Muchas gracias, mi Rocío"*, como ella solía llamarme. Vamos a imaginarlo mientras le dedicamos este merecido aplauso a ella, que seguro recibirá de buen grado desde allí donde esté.

Hasta siempre, Antoñita.

Rocío López.

PROPORCIONES EN LA GUITARRA FLAMENCA: FLAMENCO Y CULTURA ANDALUSÍ

Comenzamos este breve artículo mencionando la Metodología STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics), cuyo objetivo básico es realizar una "Aproximación para la enseñanza de las ciencias, tecnologías, ingenierías, artes y matemáticas de forma interdisciplinar". Estudios recientes confirman que participar en actividades extraescolares relacionadas con las STEAM puede tener un impacto positivo en los logros y la confianza de la juventud en estas las disciplinas[1]. En el caso que nos ocupa, el arte flamenco puede ser un vehículo para enseñar matemáticas y otras materias como literatura, historia, música, etc. En el artículo [1] se proponen distintas tareas en el estudio del flamenco que pueden utilizarse para introducir conceptos matemáticos tales como áreas, combinatoria, algoritmos o funciones. Recientemente, publicábamos en esta revista un trabajo sobre el binomio "matemáticas y flamenco" [2]. Como ejemplo de estudios multidisplinares con metodología STEAM, nuestro grupo de investigación COFLA (Computación y Flamenco)[2] está centrado en el estudio del flamenco usando matemáticas e informática.

En este trabajo hablaremos de las proporciones de la guitarra flamenca y una posible explicación relacionándolo con la cultura andalusí. Pero antes de meternos en faena y con objeto de irnos centrando en el escenario, es conveniente apuntar que existe un área de la matemática conocida como etno-matemática, campo interesado en estudiar las formas geométricas que se usan en diferentes culturas. La búsqueda de señas de identidad de la estética en una determinada cultura puede ofrecernos indicios sobre las preferencias de la comunidad con respecto a, por ejemplo, su música. Esto puede ayudar para entender la evolución de la música y de las estéticas culturales y es también objeto de estudio de la etno-musicología. Para tener una idea básica de estos dos enfoques sugerimos al lector una lectura rápida de los trabajos [3] y [4]. En este contexto nos podemos hacer preguntas como:

- ¿cuáles son las propiedades matemáticas de preferencia en el flamenco, en particular, en la morfología de guitarra?
- ¿Cómo usar matemáticas para encontrar similitudes entre las culturas?

Trataremos de apuntar algunas respuestas en este trabajo.

Proporciones de la guitarra flamenca

Comenzamos a hablar de la morfología de la guitarra, instrumento clave en el flamenco. En la figura 1 se muestran distintas partes de la guitarra flamenca. (1) Tiro de cuerda, (2) Longitud de la caja, (3) Anchura lóbulo mayor, (4) Anchura lóbulo menor, (5) Cintura, (6) Diámetro de la boca. Vamos a considerar la proporción que existe entre, por ejemplo, el tiro de cuerda (1) y la longitud de la caja (2). También podemos ver la proporción entre (2) y (3). En la Figura 1 también se muestra el rectángulo representado por esas medidas. La pregunta es ¿cuánto será el valor de (1) dividido entre (2)?

[1] https://www.fecyt.es/es/node/2568/pdf-viewer

[2] www.cofla-project.com

Una de las proporciones matemáticas más conocidas es la proporción áurea o divina proporción, definida por el griego Euclides (300-265 a. C.), quien puso las bases de la geometría analítica. A esta proporción, que numéricamente es 1,61803398… y está presente en la naturaleza, le dedicó todo un libro el matemático italiano Luca Pacioli en 1509, considerado como el padre de la contabilidad y cuya amistad con Leonardo da Vinci propició una estrecha colaboración profesional. Como resultado de ello, el artista usó dicha proporción en muchas de sus obras. En la Figura 2 se ilustra la obtención de la proporción de oro o divina sobre la obra "El hombre de Vitruvio", con el que da Vinci quería representar el hombre "perfecto". De hecho, la proporción de Euclides ha conquistado el mundo del arte pues se encuentra en muchas construcciones arquitectónicas, esculturas, etc.

Esta sería la proporción candidata para nuestra guitarra flamenca. Pero no. Mediciones de las guitarras españolas muestran que la proporción del rectángulo que contiene a la caja de la guitarra, véase la Figura 3, es 1,3 y no 1,6. Pues resulta que esa proporción fue bautizada por el arquitecto Rafael de la Hoz como la proporción cordobesa [4], y la llamó así porque aparece en muchas construcciones de la ciudad andaluza. La pregunta ahora es ¿y porqué aparece también esa proporción en la guitarra flamenca? Intentaremos dar una posible explicación en el apartado siguiente.

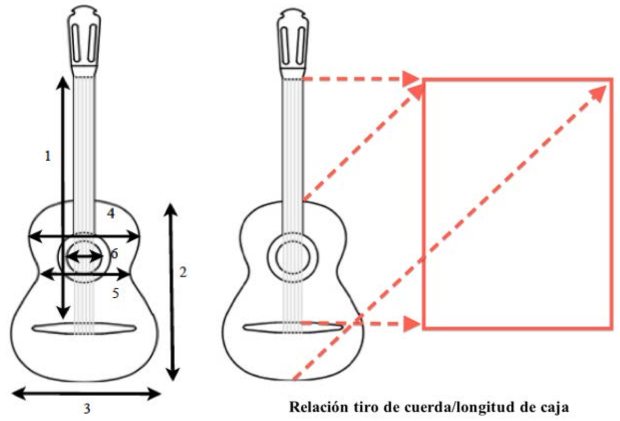


Figura 1. Medidas de la guitarra y proporción de dos medidas concretas (1 y 2).

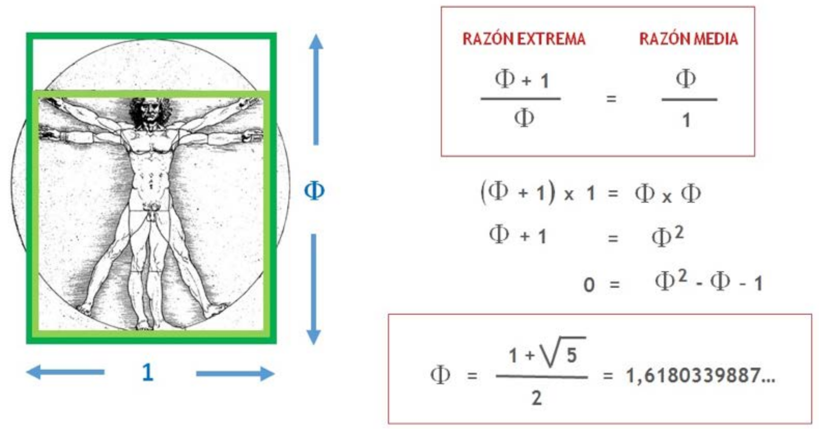


Figura 2. Obtención de la razón divina.

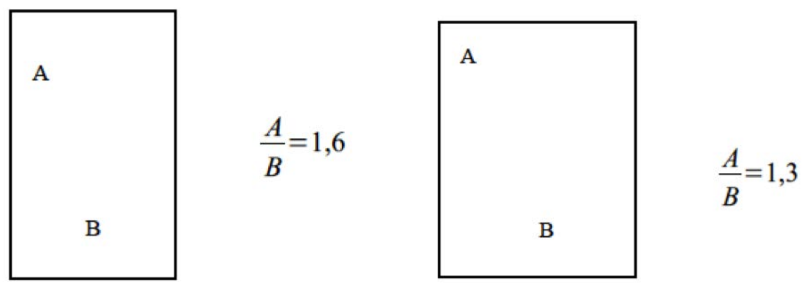


Figura 3. Rectángulo Euclídeo (izquierda) y rectángulo cordobés (derecha).

Conexión con la cultura andalusí

Empezaremos a mencionar que el padre de la guitarra flamenca (y española) fue el lutier Antonio de Torres (1817-1892), natural de Almería. Tras una primera etapa en Almería, decidió irse a construir guitarras a Sevilla, donde conoció al afamado guitarrista Julián Arcas. Fue un renovador y dio a la guitarra su actual elegancia de líneas y una sonoridad que admiraron los músicos de la época. Él fue quien diseñó la plantilla moderna que se generalizaría entre los constructores. Pues bien, ¿porqué Antonio de Torres usaría la proporción cordobesa si no se conocía en aquella época? Cabe destacar que también en Sevilla podemos encontrar dicha proporción en multitud de creaciones artísticas. En la Figura 5 nos referimos a la Casa De Pilatos y exponemos el azulejo característico de sus zócalos. Entonces, podemos inferir que el constructor buscaba una estética de belleza que él, y quizás todos los andaluces, tenía en su inconsciente. ¡Y aquí es donde viene la conexión con la cultura árabe!

Andalucía estuvo habitada por musulmanes desde el siglo VIII hasta finales del XV y, como sabemos, centros culturales del mundo andalusí eran Qurtuba (Córdoba), donde permanecieron hasta 1236, Isbiliya (Sevilla), hasta 1248 y Granada, donde reinaron los Nazaríes hasta 1492. En estos tres enclaves andaluces podemos apreciar la belleza de la arquitectura andalusí, donde está presente nuestra proporción cordobesa.

También nos deberíamos preguntar porqué esa proporción fue tan utilizada como signo de belleza en la cultura árabe. Aquí os va la respuesta.

Como se ilustra en la Figura 5 (izda), la proporción cordobesa está sutilmente oculta en el octógono regular. Resulta de dividir el radio del polígono de 8 lados iguales (distancia del centro a un vértice) por la longitud de una cara (distancia entre dos vértices consecutivos). Y precisamente, el octógono es una figura geométrica muy usada en la cultura árabe. Como ejemplo sencillo, podemos observar que las mesas en una tetería marroquí son octogonales. La razón hay que buscarla en el triángulo mágico filosofía-religión-arte, que ya estaba presente en el pensamiento de los sabios griegos. Cabe recordar las palabras de Platón: "Dios siempre hace geometría" o "La Estética, cualidad reconocible de la Ética". Y también sabemos que los eruditos árabes tomaron muchos conceptos de los griegos. Por cierto, un ejemplar del libro VI de los Elementos de Euclides, donde se define precisamente la proporción divina, fue conservado y llevado a Córdoba por los musulmanes y de allí se tradujo a distintos idiomas. Precisamente, le debemos a la sensibilidad y al amor que profesaban los habitantes andalusíes por la ciencia y la cultura, la conservación de estos manuscritos, donde se postularon los fundamentos de la geometría analítica moderna.

Concluimos. En las palabras de Mahoma está la clave: "Dios es bello y ama la belleza". Y la belleza debe venir representada por una configuración cercana a la divinidad. Tanto en la cultura griega como musulmana, el círculo está considerado como la figura que representa lo divino, lo inalcanzable, la perfección. Por otra parte, es el cuadrado la figura más regular y sencilla, como los hombres, y representa lo terrenal, lo humano. Tenemos entonces al octógono representando un papel de nexo o puente entre lo divino y lo humano, una representación de Dios en la Tierra, una forma de acercarnos a la perfección. Esta teoría explicaría el uso del octógono y su proporción, llamada cordobesa cinco siglos después por el cordobés Rafael de la Hoz, en las construcciones andaluzas y, como corolario, justificaría la concepción de belleza del maestro Torres. En la Figura 6 recordamos la figura de Antonio de Torres, al que le debemos nuestra guitarra flamenca y el mapa del mundo andalusí en el siglo XII, de cuyo legado debemos estar orgullosos los andaluces.

José Miguel Díaz-Báñez
Catedrático de Matemáticas Aplicadas. Universidad de Sevilla

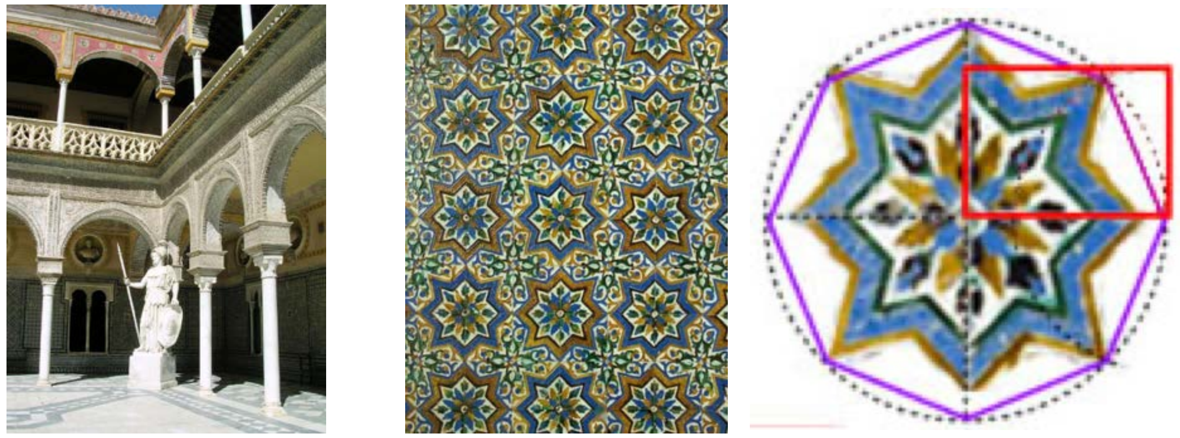


Figura 4. Azulejería en la casa de Pilatos. A la derecha, el diseño del azulejo característico y el rectángulo cordobés.

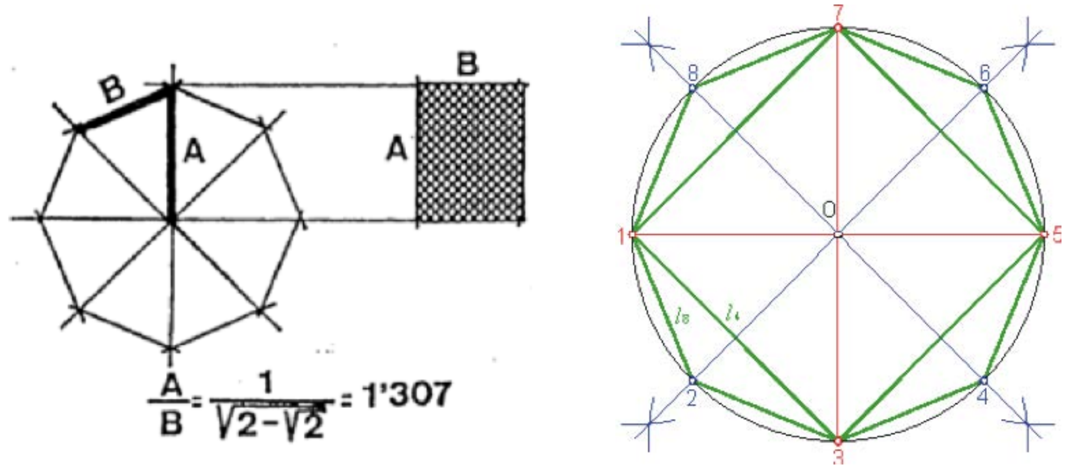


Figura 5. Obtención de la proporción cordobesa (izda). El octógono, figura puente entre lo divino y lo humano (dcha).

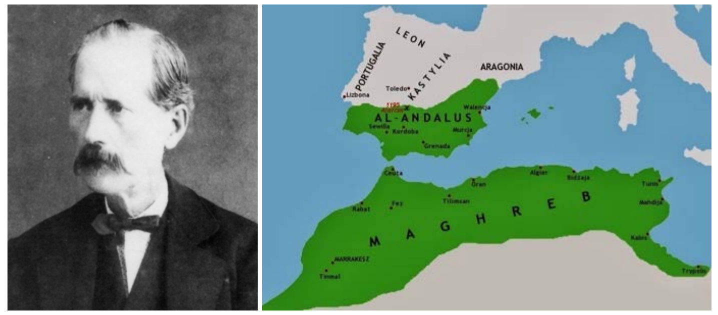


Figura 6. El maestro Antonio de Torres y los límites de Al-Andalus durante el domino de los Almohades (1147-1269).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

[1] Díaz-Báñez, J.M. Sobre problemas de matemáticas en el estudio de la música flamenca, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 13, (3), 513-541, 2013.
[2] Díaz-Báñez, J.M. Matemáticas y flamenco: un binomio inesperado, Cartapacio de Ciencias, 2018.
[3] D'Ambrosio, U. Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2), 100-107, 2014.
[4] Campbell, P. S. Etnomusicología y Educación Musical: Punto de encuentro entre música, educación y cultura. Revista internacional de educación musical, (1), 42-52, 2013.
[5] De la Hoz, R. Presentación especial en las "VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "THALES", Córdoba: Universidad de Córdoba, 1996.

ESCUCHEMOS LAS MATEMÁTICAS. DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS A ESTRUCTURAS MUSICALES: EJEMPLOS PARA EL AULA

Es común que las matemáticas se asocien con fórmulas, ecuaciones y algoritmos y es entendible que así sea. Una fórmula matemática puede usarse para resolver problemas prácticos relacionados con la medicina o la construcción de edificios, es una herramienta potente. Sin embargo, detrás de las reglas que se aprenden para hacer cálculos específicos existe una teoría, abstracta y precisa, que consiste en captar los patrones y simetrías existentes en la naturaleza y en las creaciones del hombre para después formalizarlos en el lenguaje de las matemáticas.

La música también consiste en simetrías y patrones que se formalizan en las notas, el contorno y las indicaciones rítmicas de una partitura. La gran diferencia es que hay una orquesta que puede tocar los símbolos y conceptos sonoros del lenguaje musical, mientras que la abstracción matemática no tiene tal traductora. No obstante, a través de la hermandad entre las dos disciplinas y entre sus dos lenguajes llenos de símbolos y estructuras lógicas, ha surgido una disciplina que representa su fusión, la teoría matemática de la música. Asimismo, en los últimos años, se ha visto como la pedagogía de las matemáticas puede realzarse a través de esta nueva disciplina, con el uso en el aula de los ejemplos interesantes que han arrojado los investigadores del área.

Sólo se darán algunos ejemplos de los muchos recursos que hay para introducir y reforzar estructuras, técnicas y conceptos matemáticos a través de la música.

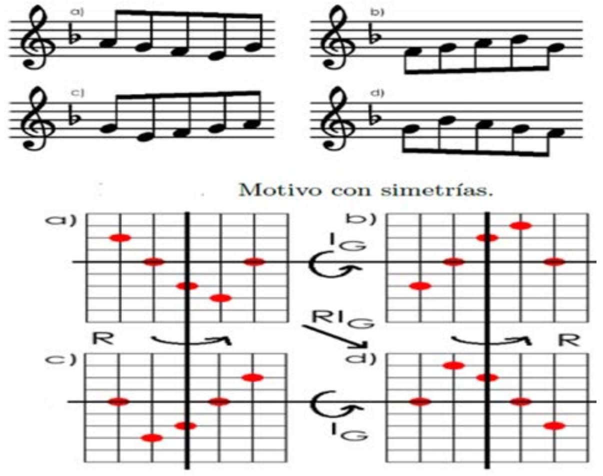
I. Simetrías, patrones de frisos y su representación musical

Un grupo de frisos es una clasificación matemática de patrones repetitivos unidimensionales basada en las simetrías del patrón.

Tales patrones surgen frecuentemente en la arquitectura y en el arte decorativo. De la misma manera, ha sido posible encontrar patrones de frisos en la música, ya que las operaciones geométricas que se emplean para clasificar los patrones de frisos también se dan en la música. Es más, podemos hablar de un "diccionario" matemáticas-música como se puede ver en la figura 1, donde el término musical, en negro, tiene su "traducción" al término matemático en rojo:

Figura 1: Diccionario Música-Matemáticas

En la figura 2 se ve un tema de la fuga 6 en re menor de Bach, donde los giros musicales de *inversión, retrogradación y retrogradación* inversión se han traducido a funciones matemáticas entre conjuntos.



$$I_s : \mathcal{T}(n) \mapsto \mathcal{T}(n),$$
$$\{x_i\}_{i=1}^n \mapsto \{y_i = 2s - x_i\}_{i=1}^n,$$

$$R : \mathcal{T}(n) \mapsto \mathcal{T}(n),$$
$$\{x_i\}_{i=1}^n \mapsto \{y_i = x_{n-i+1}\}_{i=1}^n,$$

$$RI_s : \mathcal{T}(n) \mapsto \mathcal{T}(n),$$
$$\{x_i\}_{i=1}^n \mapsto \{y_i = 2s - x_{n-i+1}\}_{i=1}^n.$$

Figura 2: Fuga 6 en re menor de Bach como funciones matemáticas

Como ejemplo de un patrón de frisos se tomará la clasificación conocida como la *vuelta a saltos*. Este grupo de frisos se genera por una traslación horizontal (una repetición en la música), una *reflexión horizontal* (una inversión en la música) y una *reflexión vertical* (una retrogradación en la música). De hecho se pueden "escuchar" las operaciones geométricas y así "concretizar" la abstracción algebraica. Dicha abstracción algebraica se plasma en el grupo (el *grupo* como estructura matemática) D∞ ×Z2.

$$S_X = \langle T, H, V \mid V^2 = H^2 = T^0 = 1, HVH = V, HTH = T, VTV = T^{-1} \rangle \cong D_\infty \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

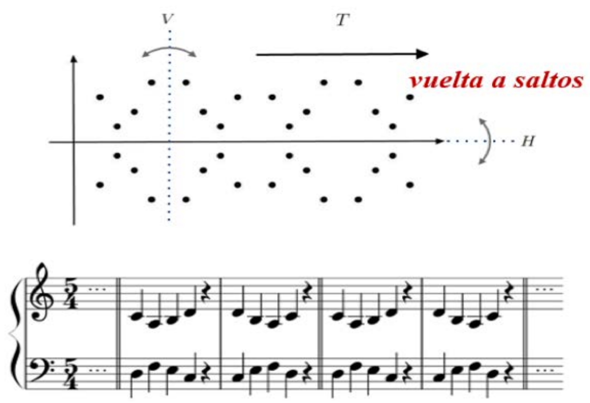


Figura 3. Traducción de geometría a música.

Lo interesante de los patrones de frisos para el aula es que se pueden estudiar a diferentes niveles de enseñanza matemática. A un nivel de enseñanza elemental, lo único que se hace es identificar y describir las repeticiones para distinguir los patrones. Al nivel secundario se pueden identificar las operaciones geométricas para clasificar los patrones e identificar las funciones; a un nivel universitario, se harían las clasificaciones algebraicas a través de los isomorfismos de grupos.

Por otro lado, como se aprecia en la figura 3, es posible "traducir" transformaciones geométricas a música. De hecho, en este ejemplo los estudiantes de matemáticas que diseñaron las traslaciones y reflexiones de puntos no tenían conocimiento del lenguaje musical, pero pudieron "escuchar" las operaciones cuando fueron "traducidas" a dicho lenguaje.

II. Escalas bien formadas

Cualquier persona que se ha interesado en tocar la guitarra con acordes, a manera de acompañamiento, se habrá topado con el *Círculo de Quintas*. En la figura 4 vemos el Círculo de Quintas con las letras que representan los acordes y donde la letra F es equivalente a *fa, C* es equivalente a *do, G a sol, D a re, etc.* Recuérdese que las letras también pueden representar las notas individuales.

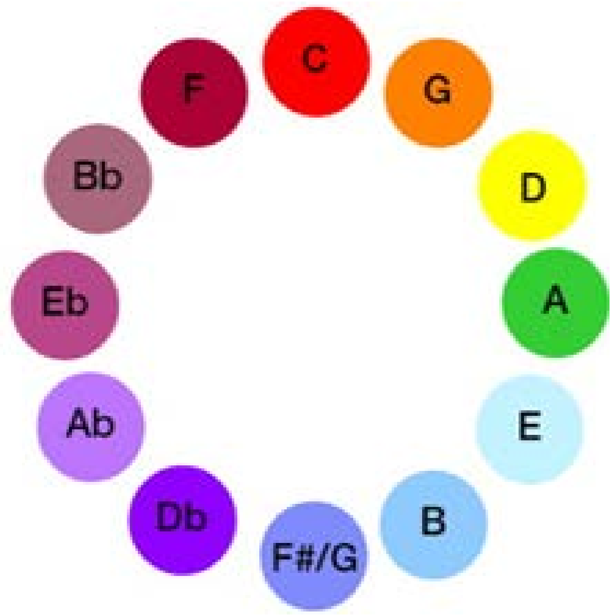


Figura 4: El Círculo de Quintas con letras

Cuando se comienza con el *do* central del piano y, después de pasar por las 12 teclas blancas y negras se llega a un do más agudo, se está doblando la frecuencia. Estas 12 notas forman una *escala cromática* y un subconjunto particular de 7 notas, tomadas de las 12, se denomina *escala diatónica*, como se puede apreciar en la figura 5, donde la escala diatónica de do mayor se presenta con letras. Se puede pensar en las escalas diatónicas como las notas blancas del piano.

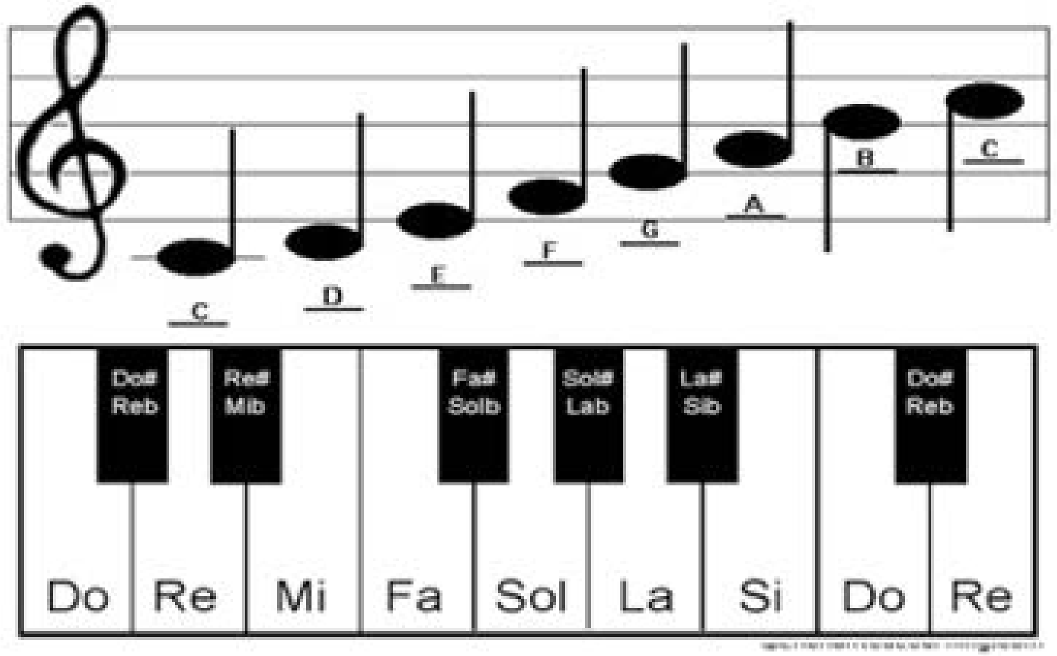


Figura 5: Escalas cromática y diatónica

Las *escalas bien formadas*, tales como la escala diatónica, tienen cualidades que encantaron a los antiguos babilonios, egipcios y griegos; asimismo, estas escalas se encuentran también en los cantos Gregorianos, la música del Renacimiento y las canciones pop de hoy.

Una característica de las escalas bien formadas es su simetría rotacional y una explicación de por qué la escala diatónica se forma por siete tonos, en vez de cuatro u ocho, se puede entender a través del grado de *simetría rotacional* que se logra cuando se arreglan los tonos en un círculo.

Cuando los tonos son conectados según el orden de la escala, se percata de la simetría rotacional. Sin embargo, como se puede apreciar en la figura 7, la escala de 6 notas no posee simetría rotacional. En la figura 8, se puede constatar que la escala de 5 notas sí posee simetría rotacional, es una escala bien formada. Lo interesante es que la escala de 5 notas, la *escala pentatónica*, también es una escala muy apreciada en la música de muchas culturas; de hecho se conoce como la escala china y es conformada por las notas negras del piano.

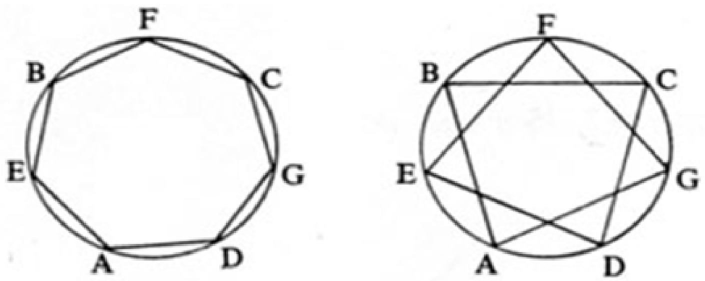


Figura 6: La escala diatónica, de 7 notas, muestra simetría rotacional

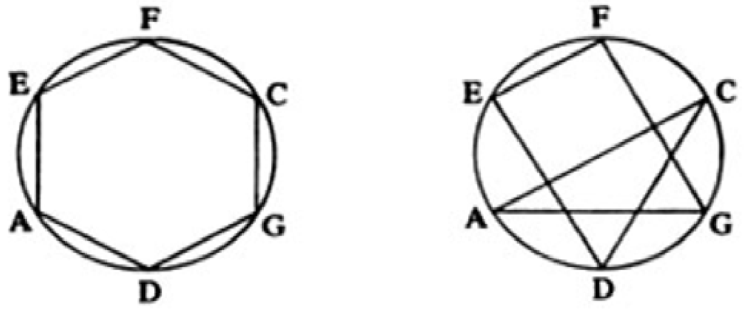


Figura 7: un subconjunto de 6 notas no posee simetría rotacional

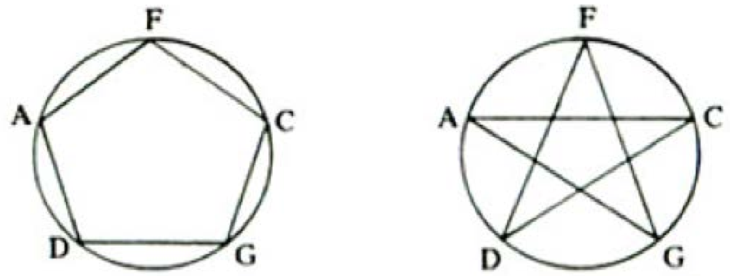


Figura 8: la escala pentatónica, de 5 notas, también muestra simetría rotacional

Las escalas bien formadas también poseen características algebraicas que las distinguen de otros subconjuntos de la escala cromática y pueden estudiarse a través de fracciones continuas pero, por motivos de espacio, no daremos los detalles aquí.

Con estos ejemplos esperamos que se haya podido transmitir cómo la teoría matemática de la música puede jugar un papel interesante en la transmisión de conceptos matemáticos, a todos los niveles de estudio.

Mariana Montiel
Doctora en matemáticas, Profesora Titular,
Departamento de Matemáticas y Estadística,
Universidad Estatal de Georgia, USA

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1. Carey, N., Clampitt, D. (1989), Aspects of Well Formed Scales, Music Theory Spectrum Vol. 11, No. 2 pp. 187-202.
2. Hart, V., Symmetry and transformations in the musical plane, C. Kaplan y R. Sarhangi (Eds.), Proc. of Bridges 2009: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture. pp. 169-176, London: Tarquin Publications.
3. Montiel, M. (2018) Mathematical music theory: Integrated course pairing with mathematics and music students from the USA and China. In Theoretical and Practical Pedagogy of Mathematical Music Theory: Music for Mathematics and Mathematics for Musicians, From School to Postgraduate Levels, eds. M. Montiel y F. Gómez, World Scientific Publishing Co. https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/10665

LA MÚSICA COMO RECURSO DE LAS CLASES DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

El curso 1999/2000, la Ley Órganica del Sistema Educativo (LOGSE) amplió el cuadro de bachilleratos. Una vez aprobado el cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), los alumnos tienen la oportunidad de elegir entre cuatro opciones: Tecnológica, Ciencias de la Naturaleza, Humanidades y Artística. Sin embargo, la aparición de un bachillerato artístico no ha supuesto cambios significativos en los contenidos de matemáticas que vayan más allá de dar mayor o menor importancia a determinados conceptos. Sería poco honesto no reconocer que con los materiales docentes actuales se intenta hacer referencia al entorno del alumno, especialmente en temas de física, economía, ingeniería, etc. Pero un área por la que el alumno siente gran interés, como es la música, pasa inadvertida en los programas de matemáticas.

Conscientes de esta necesidad, en 2008, la Federación Española de Sociedades Profesores de Matemáticas dedicó el Día Escolar de las Matemáticas a la Música y Matemáticas, y se elaboraron materiales que pueden consultarse en internet para trabajar durante todo el año en estos temas (Liern y Queralt, 2008). Desde ese año, a pesar de que mi docencia es universitaria, he participado en multitud de actividades de secundaria en las que el objetivo era aprovechar el interés por la música para despertar el interés del alumnado por la materia de Matemáticas.

Como está claro que complementar todos los cursos de matemáticas de secundaria con cuestiones musicales es una tarea que excede nuestra pretensión, vamos a centrarnos en tres bloques: aritmética - álgebra, geometría y funciones.

Estudiar los sistemas de afinación brinda una magnífica oportunidad para trabajar métodos en los que hay que determinar, con criterios matemáticos, cómo elegir un conjunto pequeño de sonidos, a los que llamaremos notas musicales.

Desde el primer milenio antes de Cristo, los caldeos relacionaron muy estrechamente la música con los astros y las matemáticas. De hecho, multitud de fenómenos cósmicos se representaban comparando las longitudes de cuerdas tirantes. La armonía producida al sonar esas cuerdas juntas era precisamente lo que se conoció como "armonía de las esferas celestes" y esto es lo que los pitagóricos difundieron. Todo estaba basado en relaciones entre números, de hecho, solo estaban afinadas aquellas notas que se obtenían como conscientes entre potencias de 2 y de 3 (ilustración 1).

Ilustración 1: Afinación pitagórica. Reproducción de parte de un gráfico de Theorica musicae de Franchino Gaffurio (1492) elaborada en una tablilla cerámica (socarrat) por Teresa Liern.

Pero la armonía de las esferas no sólo se estaba extendiendo por la cultura occidental. A la vez que Pitágoras (580 – 500 a. de C.) estaba mostrando su forma de elegir las notas, en China, sobre todo gracias al impulso de Confucio (551 – 479 a. C.), los números también recuperaban el significado sagrado que los ligaba a la producción musical, estrechamente vinculada con la aritmética. Para Confucio, la música se basaba en las ideas del matemático y filósofo Ling-Lun, quien, tras un largo viaje, estableció como base de la música china un sistema pentatónico logrado a través del corte de una caña de bambú hueca. Al principio tenía la longitud de 1 pie, luego se cortaba sucesivamente esa caña en una proporción de 2/3 de su longitud original; es decir, la caña perdía cada vez un tercio de su longitud.
Hacer que nuestros alumnos sean capaces de crear notas a partir de potencias de 2 y de 3 permite obtener de forma natural conceptos que al estudiante le resultan complicados, como son las progresiones, los límites etc. Además, con una madera, una cuerda tensa y una regla, pueden hacer sus propias mediciones y escuchar las notas que han creado.

A lo largo de la Historia, al sistema de Pitágoras se le sumaron nuevas posibilidades para elegir notas musicales. Consistía en añadir potencias de 5 donde sólo las había de 2 y 3, generando así muchas nuevas opciones que están en la base armónica de los grandes músicos y musicólogos que compartieron época e ideas con enormes pensadores de su tiempo (Ilustración 2).

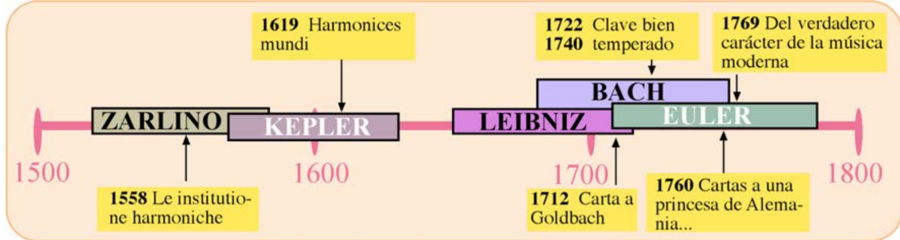


Ilustración 2: Zarlino y Bach fueron contemporáneos de científicos de primera
Fuente: Elaboración propia.

Precisamente la figura de J. S. Bach (1685 – 1750) nos sirve de nexo para otro de los bloques: la geometría. Sin duda, la genialidad con la que Bach aborda el contrapunto y la fuga, utiliza razonamientos geométricos. Se parte de uno o varios temas y se les somete a transformaciones geométricas que mantienen la forma del tema. Se trata de traslaciones, giros y simetrías que confieren a la obra una estructura totalmente matemática, pero de una belleza y originalidad fuera de toda duda.

En el bloque de funciones, abordar la música como un fenómeno que depende del tiempo, es un ejercicio que plantea muchas posibilidades docentes en el aula de Matemáticas. Que el estudiante sea capaz de crear sus propias funciones, resulta muy valioso, no solo por el grado de implicación que supone, sino porque con esto serán capaces de entender la utilidad de conceptos como dominio, rango, gráfica de la función, etc. (Ilustración 3).

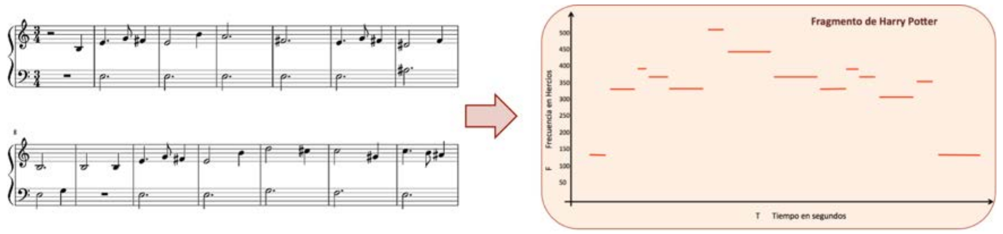


Ilustración 3: Gráfico de función elaborado a partir de un fragmento de la partitura de Harry Poter.
Fuente: elaboración propia.

En la práctica, se trata de presentar en el aula un pequeño fragmento de alguna música conocida e identificar cada nota con su frecuencia (expresada en Hz.). Si a cada figura musical se le asigna la duración adecuada, el pentagrama se puede transformar en una función escalonada de la que el alumno puede estudiar sus propiedades, siguiendo un proceso metodológicamente más coherente: primero construye y después se analiza.

No querría acabar este resumen sin reivindicar el papel de las Matemáticas como una herramienta necesaria para entender el mundo que nos rodea, incluso el de las aficiones como es el caso de las Música. Por esta razón, estoy convencido de que el docente tiene un gran aliado en el gusto de sus estudiantes por la música y el baile. Aprovechar este interés puede modificar sustancialmente la actitud del estudiante.

Vicente Liern Carrión

Licenciado en Matemáticas y Doctor en Física Teórica por la Universidad de Valencia, donde es catedrático de Matemáticas para la Economía y la Empresa. Trombonista durante más de treinta años, ha participado en multitud de actividades de ciencia y arte. Ha sido responsable de la sección Musymáticas de la revista SUMA y es académico numerario de la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras y de la Royal European Academy of Doctors.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

[1] Ibáñez Ferrando, A. (2019): Una proposta per a incorporar qüestions de Música als programes de Matemàtiques de batxillerat. Trabajo Fin de Grado, Universitat de València.
[2] Goldáraz Gainza, J. J. (1992): Afinación y temperamento en la música occidental. Madrid. Alianza.
[3] Liern, V., Queralt, T. (2008): Música y matemáticas. La armonía de los números. Federación Española Sociedades Profesores Matemáticas, Badajoz.
https://matesnoaburridas.files.wordpress.com/2010/11/cuadernillo-musica-y-matematicas-dia-escolar.pdf
[4] Liern, V. (2009): Las matemáticas de los músicos, SUMA, 60, 123-129.

¿CÓMO EXPLICAR ACÚSTICA A ALUMNOS CON CARENCIAS DE MATEMÁTICAS?

La impartición de la asignatura de Acústica en el ámbito de las Enseñanzas Superiores de Música supone un auténtico reto para todo docente de conservatorio. El profesor se encuentra, por lo general, con alumnos muy focalizados en la praxis de su instrumento y que presentan un bajo nivel de motivación con respecto a una asignatura que puede suponerles una dificultad añadida y que, a simple vista, no les ofrece conexiones directas con su práctica instrumental. Por si fuera poco, las características de dicho alumnado son de índole muy diversa: aunque la gran mayoría procede directamente del Bachillerato en su modalidad Artística, encontramos un alto número de estudiantes que han cursado las modalidades Científica o Humanística. Además, existe un porcentaje nada despreciable de alumnos de otras procedencias: alumnos que no poseen el Título de Bachiller pero que han accedido superando la prueba de madurez, alumnos procedentes del mundo laboral con estudios realizados mucho tiempo atrás, así como alumnos procedentes de otros Títulos Superiores o Grados Universitarios. Esta aula heterogénea supone un auténtico desafío para nuestra práctica docente. Sin embargo, con una estrategia adecuada y una correcta utilización de las herramientas tecnológicas y matemáticas disponibles podemos convertir esta situación en una excelente oportunidad para el aprendizaje.
Nuestro principal objetivo ha de ser despertar el interés del alumnado por la materia de Acústica. Esta labor no siempre va a ser fácil. Tendremos que buscar ejemplos sencillos y potentes, de carácter sonoro en medida de lo posible, en los que exista una aplicación directa de los contenidos físicos sobre la práctica musical en sus distintas vertientes -ya sea instrumental, compositiva o musicológica- y que, por su peculiaridad, sorprendan al alumnado. De esta sorpresa surgirá posiblemente una pequeña fascinación que, a su vez, puede recrear las condiciones propicias para la germinación del interés. De esta manera podremos transmitir a nuestros alumnos los conocimientos acústicos básicos e imprescindibles para el músico, asegurándonos de maximizar la adquisición de conocimiento en el total del aula.

La primera herramienta que necesitamos es un Sistema de Gestión de Aprendizaje (Learning Management System) que nos ofrezca la posibilidad de organizar todo el material docente y recursos TIC y que supla, de alguna forma, la inexistencia de un Laboratorio de Acústica con la que usualmente nos vamos a encontrar en la gran mayoría de centros educativos. Existen numerosas plataformas, muchas de ellas gratuitas; su elección quedará supeditada a las necesidades específicas de nuestra aula así como los determinados condicionantes administrativos de nuestro centro. Es especialmente relevante en este punto hacer mención a la necesidad de crear para el alumnado unos apuntes claros, concisos y organizados, en los que los contenidos hayan sido correctamente adaptados y secuenciados, y que se vean acompañados de formularios de autoevaluación con numerosas preguntas de tipo test de carácter teórico y práctico que pueden ser fácilmente embebidos en nuestro sistema LMS, automatizando de esta manera el proceso de enseñanza-aprendizaje y facilitando el trabajo autónomo del alumno.

La segunda herramienta fundamental reside en la creación de una base de datos de recursos multimedia, especialmente vídeos y audios, con la que acompañar nuestra explicación magistral y sobre la que desarrollar el contenido de la clase. Son especialmente eficaces los vídeos que muestren instrumentos musicales exóticos, fenómenos físicos impactantes, experimentos realizados en laboratorios o vídeos grabados a velocidades ultra bajas. En este aspecto existen numerosos repositorios de vídeo online y páginas web en los que podemos encontrar prácticamente cualquier ejemplo que necesitemos.

Por último, la herramienta de los recursos TIC específicamente diseñados para el estudio de la Acústica constituye el eje fundamental sobre el que se articula esta propuesta metodológica y será, por tanto, a la que le dedicaremos más tiempo. El caso ideal sería poder estudiar la Acústica Física y Musical desde la realización de experimentos en el propio laboratorio. Sin embargo, como hemos mencionado anteriormente no siempre disponemos de un laboratorio de Acústica o de un material adecuado que nos permita diseñar procedimientos experimentales con los que desarrollar los contenidos de nuestra asignatura. Podemos suplir esta carencia mediante la utilización de simulaciones físicas y musicales con las que facilitar al alumnado el aprendizaje a través de la experimentación –en este caso sonora- en el aula. Existen algunas plataformas online que ofrecen simulaciones físicas [1] muy completas, con las que podemos trabajar contenidos como el movimiento armónico simple, las propiedades ondulatorias del sonido, o realizar una audiometría en clase [2]. La exploración de las distintas simulaciones existentes nos permitirá evaluar su aplicabilidad en función de nuestros contenidos y de las características de nuestro alumnado.
Sin embargo existe una posibilidad docente más interesante aún: podemos programar nuestras propias simulaciones, diseñar nuestros propios programas adaptados exactamente a nuestro proceder docente. Existen numerosos lenguajes de programación musical [3][4] como MAX/MSP, Pure Data o SuperCollider, usualmente destinados a la creación electroacústica y a la composición musical asistida por ordenador, que pueden ser utilizados para esta finalidad didáctica.

Con estos lenguajes de programación resulta relativamente sencillo diseñar simulaciones con los que experimentar diferentes fenómenos acústicos: podemos escuchar y visualizar las pulsaciones generadas a partir de la interferencia de dos ondas con frecuencias muy próximas entre sí (véase Ilustración 1); explorar los límites de nuestro sistema auditivo mediante la creación de un programa que recorra todo el espectro de frecuencias audibles; diseñar un programa que sume los primeros n términos del desarrollo en Serie de Fourier de las distintas formas de onda (cuadrada, triangular, diente de sierra) escuchando y viendo el timbre generado mediante un osciloscopio virtual (Ilustración 2), o diseñar un programa que, conectado a un teclado MIDI, nos permita interpretar música y cambiar, en tiempo de ejecución, el sistema de afinación sobre el que se calculan las frecuencias de las distintas notas (Ilustración 3).

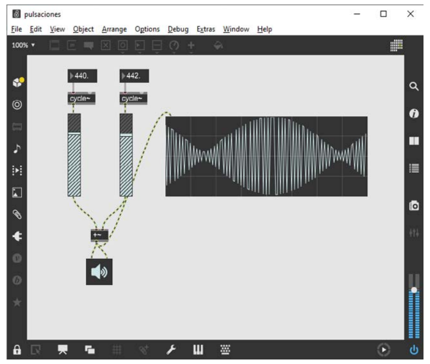


Ilustración 1: Ejemplo de patch en el lenguaje de programación MAX/MSP para la generación, visualización y escucha de pulsaciones (fuente: elaboración propia).

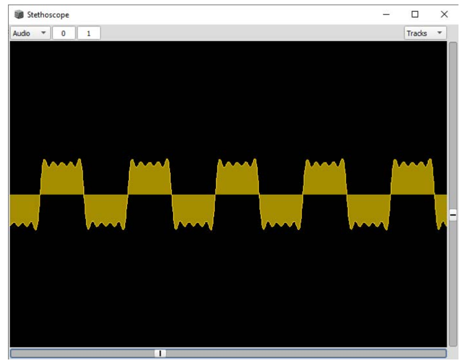


Ilustración 2: Ejemplo de osciloscopio virtual en el lenguaje de programación SuperCollider en el que se muestra la suma de los cinco primeros términos del desarrollo en Serie de Fourier de la onda cuadrada (fuente: elaboración propia).

Ilustración 3: Ejemplo de patch en el lenguaje de programación SuperCollider para la interpretación a través de un teclado MIDI de música en distintos sistemas de afinación (fuente: elaboración propia).

Brian Martínez Rodríguez,
Doctor por la Universidad Politécnica de Valencia, Máster en Inteligencia Artificial Avanzada por la UNED, Máster en Investigación Musical por la UNIR, Título Superior de Música en Composición por el Conservatorio Superior de Música de Valencia, Licenciado en Física por la Universidad de Valencia, Catedrático de Tecnología Musical en el Conservatorio Superior de Música "Massotti Littel" de Murcia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

[1] Universidad de Colorado Boulder. (s. f.). PhET Interactive Simulations. Recuperado 18 de abril de 2020, de https://phet.colorado.edu/es/simulations/category/physics
[2] Wolfe, J. (s. f.). University New South Wales. Free hearing test on line Equal loudness contours and audiometry. Recuperado 18 de abril de 2020, de https://newt.phys.unsw.edu.au/jw/hearing.html
[3] Puckette, M. (s. f.). Pure Data – Pd Community Site. Recuperado 18 de abril de 2020, de https://puredata.info/
[4] Wilson, S., Cottle, D., y Collins, N. (2011). The SuperCollider Book. The MIT Press.

MÚSICA MENSURATA

"La música es la ciencia de toda proporción y toda relación como tal"
Aristóteles.

"La música es un ejercicio aritmético oculto del alma, que no sabe que está contando"
Leibniz.

Cuenta la leyenda que Pitágoras, queriendo demostrar racionalmente las leyes de la consonancia armónica, tuvo una revelación fortuita al pasar junto a una herrería y escuchar el sonido proveniente de los martillos, sonidos que entre sí a veces eran consonantes y otras disonantes. Pudo observar que aquellos martillos que provocaban consonancias estaban en relaciones de peso más simples (2:1 por ejemplo), que aquellos que producían disonancias.

Los pitagóricos definieron el universo a través del número, pero más allá del mito lo que sí que parece probable es que Pitágoras descubriera estas mismas relaciones en el monocordio, un instrumento de una sola cuerda que usó en sus experimentos, y, observando que la frecuencia de vibración del sonido era inversamente proporcional a la longitud de la cuerda, estableció las leyes de los intervalos musicales y sus proporciones en función de una lógica matemática (lógica que no fue inventada, sino descubierta en el interior del propio sonido), observando que la cualidad de los intervalos, es decir, el estímulo perceptivo que experimentamos al oír dos o más sonidos de forma simultánea, está en relación a las citadas proporciones.

Algo parecido ocurre con nuestra percepción del aspecto rítmico y de las proporciones existentes entre las distintas duraciones de los sonidos. El ritmo es una cualidad inherente a todas las cosas en la medida en que todas fluyen y son en el tiempo. Experimentamos el ritmo de la naturaleza en sus estaciones, la sucesión del día a la noche, nuestra respiración, los latidos de nuestro corazón, y por supuesto en el sonido, ya que el sonido es producto de una organización temporal, determinamos una nota musical según la frecuencia de vibración del cuerpo que la produce, y lo medimos en hercios, es decir, vibraciones por segundos, -la forma del sonido podríamos decir-, lo cual no es sino una manifestación del ritmo.

Uno de los avances más importantes en cuanto a la escritura del ritmo tuvo lugar cuando en el siglo XIII la música europea adoptó el sistema mensural proporcional de notación rítmica, atribuido a Franco de Colonia, el cual permitió fijar con gran exactitud la duración de un sonido, usando una grafía para cada una de las duraciones y sus silencios correspondientes.

Lo que nos permite experimentar un discurso musical es algo que en mayor o menor medida hacemos de modo inconsciente: comparar proporciones. Cada evento por separado cobra sentido en comparación a otros que lo rodean. Las duraciones de unos sonidos con respecto a otros, las duraciones de una frase o inciso musical frente al que lo precede o al siguiente, las duraciones de las distintas secciones de las que pueda constar una obra musical y la relación proporcional de unas con respecto a otras.

Con el nuevo sistema de notación mensural, la posibilidad de fijar todo esto en el papel con tal exactitud, supuso en gran medida la liberación de la imaginación sonora y la entrada a una nueva significación de lo artístico. El compositor pudo por primera vez, gracias al símbolo y a la escritura que le permitían observar sobre el papel de modo ``simultáneo´´ todo el discurso musical, establecer relaciones entre las distintas partes de una obra, y fijar proporciones cada vez más ricas y complejas, dando lugar al perfeccionamiento de la forma, la cual podía ahora albergar un contenido cada vez más expresivo.

Todo esto ocurría en un contexto estético en el que el pitagorismo ejercía su influencia a través del influjo de Severino Boecio, filósofo y poeta nacido en el año 480, que ejerció gran influencia en la música medieval.

La música, una de las siete artes liberales, se encontraba dentro del Quadrivium (música, geometría, astronomía y aritmética) dentro de una concepción situada fuera de todo hedonismo, entendiendo por tal el simple disfrute sensual de la escucha o la interpretación instrumental. Algunos de los ejemplos más deslumbrantes en tan temprana etapa de la evolución del pensamiento musical se encuentran en la música de Johannes Ockhegem (1400) y su magistral uso de las proporciones en la forma. Su "*Missa Prolationum*" constituye uno de los monumentos más ambiciosos de arquitectura formal de la antigüedad. Se trata de una misa escrita para cuatro voces, con la peculiaridad de que en la partitura solo aparecen dos de ellas, las cuales contienen al comienzo dos signos de prolación que indican el valor real de duración de cada una de las notas, es decir, se obtiene una melodía que avanza a una velocidad distinta según el signo de prolación utilizado. Como resultado obtenemos dos melodías idénticas sonando simultáneamente, pero al tener distinta prolación, una de ellas se desarrollará más rápidamente, ocurriendo un desfase proporcional. Esto se da por duplicado, ya que el mismo proceso ocurre en las dos melodías escritas en la partitura.

Es fácil darse cuenta de la proeza y virtuosismo tan elevado de dicha concepción, donde tan especulativo proceso no supone obstáculo alguno para conseguir un todo unitario en el que las voces suenan armónicamente según las convenciones de la época, en un contexto en el que el sonido fluye libremente, no hay comas, no hay puntuaciones, no hay repeticiones, es un continuo suspendido en el tiempo, delimitado por un necesario comienzo y final, pero que parece existir antes y después de sonar.

A lo largo de la evolución del arte musical encontramos ejemplos de gran maestría formal en el aspecto de las proporciones, si bien en ocasiones tales proporciones escondidas en el interior de la obra musical vienen dadas por cuestiones extramusicales (como es el caso del compositor brasileño Heitor VillaLobos, cuya obra ``*New York Skyline Melody*´´reproduce el perfil de los rascacielos de la ciudad), en otros casos parece responder a una naturaleza mucho más secreta de las cosas, como es la utilización ya sea sugerida o calculada de forma matemática de la proporción áurea, (número de oro, o divina proporción), un número irracional, con infinitos decimales y sin período, que fue descubierto como relación entre dos partes de un segmento. Este número, 1,6180339..., se encuentra en gran parte de lo que nos rodea, desde estructuras de galaxias hasta la concha de ciertos moluscos, la disposición de las semillas en un girasol, el número de pétalos en las flores, etc.

En gran cantidad de obras musicales desde la antigüedad hasta ahora encontramos este número de una forma u otra, ya sea en la relación de duración de sus partes o en el interior de las pequeñas secciones que componen la obra. En los casos más simples donde existe esta proporción basta con multiplicar el número de compases de una obra por 0,618, obtendremos un punto exacto en la partitura en el que con gran frecuencia observaremos el elemento más importante de la misma.

Emparentada estrechamente a este número, la llamada sucesión de Fibonacci, se encuentra también en la estructura de muchas de las cosas que nos rodean. Es una progresión en la que cada número resulta de la suma de los dos anteriores: 1,1,2,3,5,8,13,21, etc. Si dividimos un número de esta serie por su inmediato anterior obtenemos un resultado que se acerca a la divina proporción cuanto más avanzamos en la serie:

5:3 = 1,666
8:5 = 1,6
13:8 = 1,625
21:13 = 1,615
34:21 = 1,619
55:34 = 1,617
89:55 = **1,618**

Estas proporciones se encuentran en el *Partenón* de Atenas (siglo V a.C.), en la sonrisa de la La *Gioconda* de Leonardo Da Vinci, en la disposición de los elementos en *Las Meninas* de Diego Velázquez, así como en gran cantidad de obras musicales. Si bien en las obras musicales de la antigüedad estas proporciones están a veces sugeridas, en el siglo XX se da una clara sistematización de su uso, llegando a extremos notables y fascinantes en la música de Béla Bartók, quien utilizaba estas proporciones para la elección de los sonidos dentro de un acorde, las notas de una melodía o para definir los rasgos formales más amplios.

[1]La prolación, del latín prolatio, es un antecedente del moderno compás, podía ser mayor o menor, designando así estructuras rítmicas divisibles en tres partes (prolatio maior) o en dos (prolatio minor).

Las proporciones del gran templo de Atenas son las mismas que resuenan en ``Des pas sur la neige´´, uno de los preludios más bellos del primer libro de preludios de Claude Debussy (1862-1918). Pongamos como ejemplo el comienzo: las frases o fragmentos constitutivos de las mismas ocupan compases cuya numeración corresponde a la serie de Fibonacci. Por otro lado, la duración en compases de dichas frases también se explica mediante la misma serie.

Compases	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frases												
Duración de frases en compases	1	1	2		3			5				

Otro célebre y magistral caso de este tipo de especulación con las proporciones ya más cercano al presente lo encontramos en ``Klavierstucke IX´´de Karlheinz Stockhausen, genio indiscutible que tuvo una importancia fundamental en las vanguardias de la segunda mitad del siglo XX. Al observar el comienzo de la partitura nos encontramos con las siguientes indicaciones de compás: 142/8 seguido de 87/8, estos números corresponden a cantidades de repeticiones de una misma sonoridad, relación numérica análoga a la existente en la serie de Fibonacci, ya que al dividir la primera indicación por la segunda obtenemos una aproximación casi exacta a la proporción áurea: 142:87= 1,632...A continuación, se da el primer rasgo melódico, con notas cuyas duraciones se corresponden con los números 3-8-5-13-5-8, todos ellos constitutivos de la secuencia de Fibonacci.

Es normal que a lo largo de la historia se le haya atribuido a todas estas cuestiones un halo de misticismo, es imposible no maravillarse al observar que la naturaleza responde a un número, pero no un número cualquiera, o una aproximación, sino a un número en concreto, un número irracional, exactamente ese.

Ferruccio Busoni en su célebre ``Esbozo de una nueva estética musical´´ opina que una obra de arte dura más (es decir, deja de estar sujeta al momento histórico, cultural y estético que la vio nacer) mientras más se acercan sus materiales a la esencia propia de cada arte, y la esencia siempre es naturaleza, como si fuese una especie de verdad eterna , y es que en el arte, como en todo, se puede mentir o decir verdades. Algunas de estas verdades se antojarán subjetivas, pero en todo arte y en cualquiera de sus formas hay una verdad innegable, y es aquella que responde únicamente a la naturaleza de sus materiales.

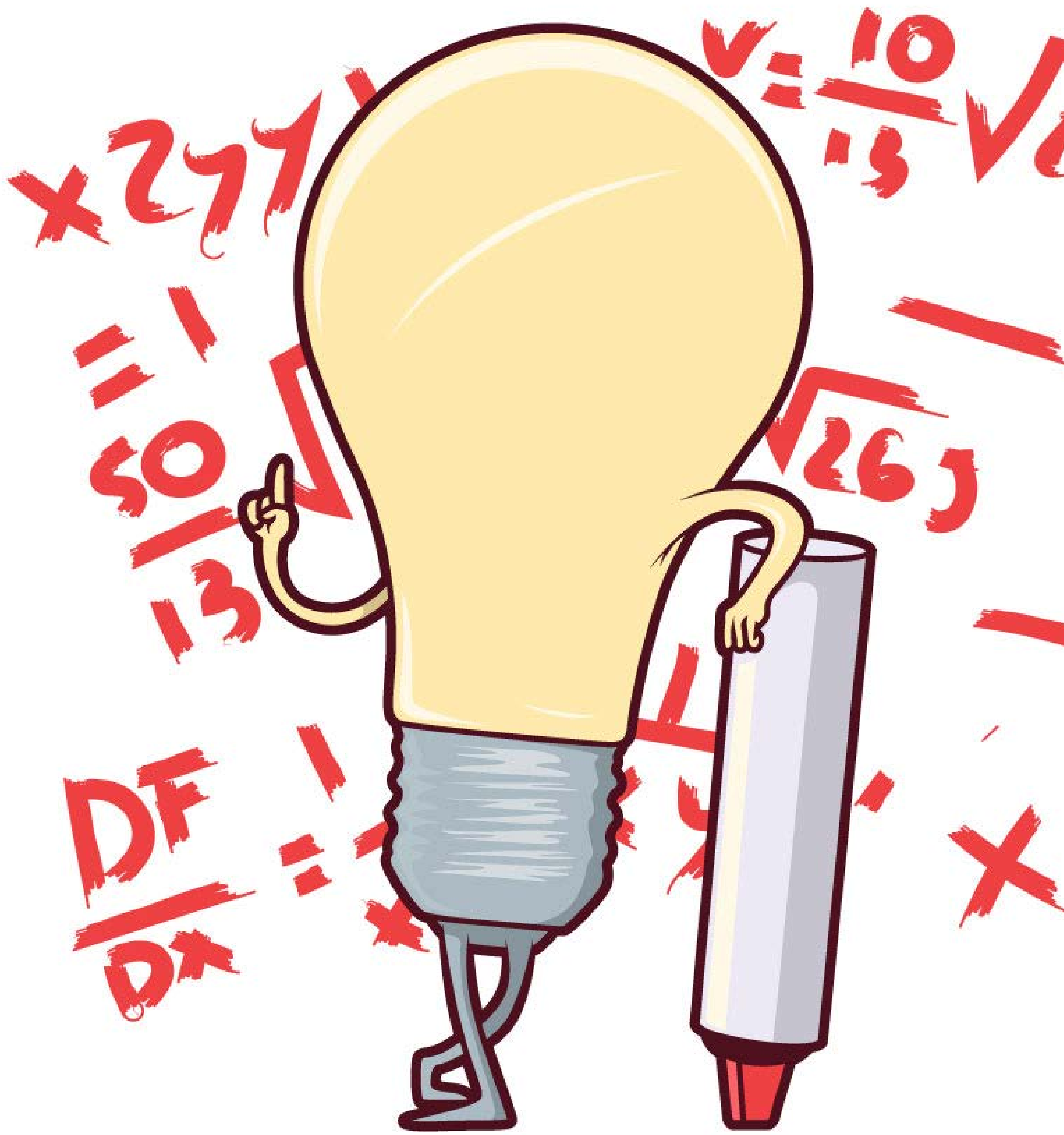
``Piénsese que el arte ha seguido tanto el camino de la naturaleza del sonido como el de la naturale-za de los hombres. Y el arte surge del compromiso entre estos dos factores, de un intento de adecua-ción mútua´´
Arnold Schoenberg

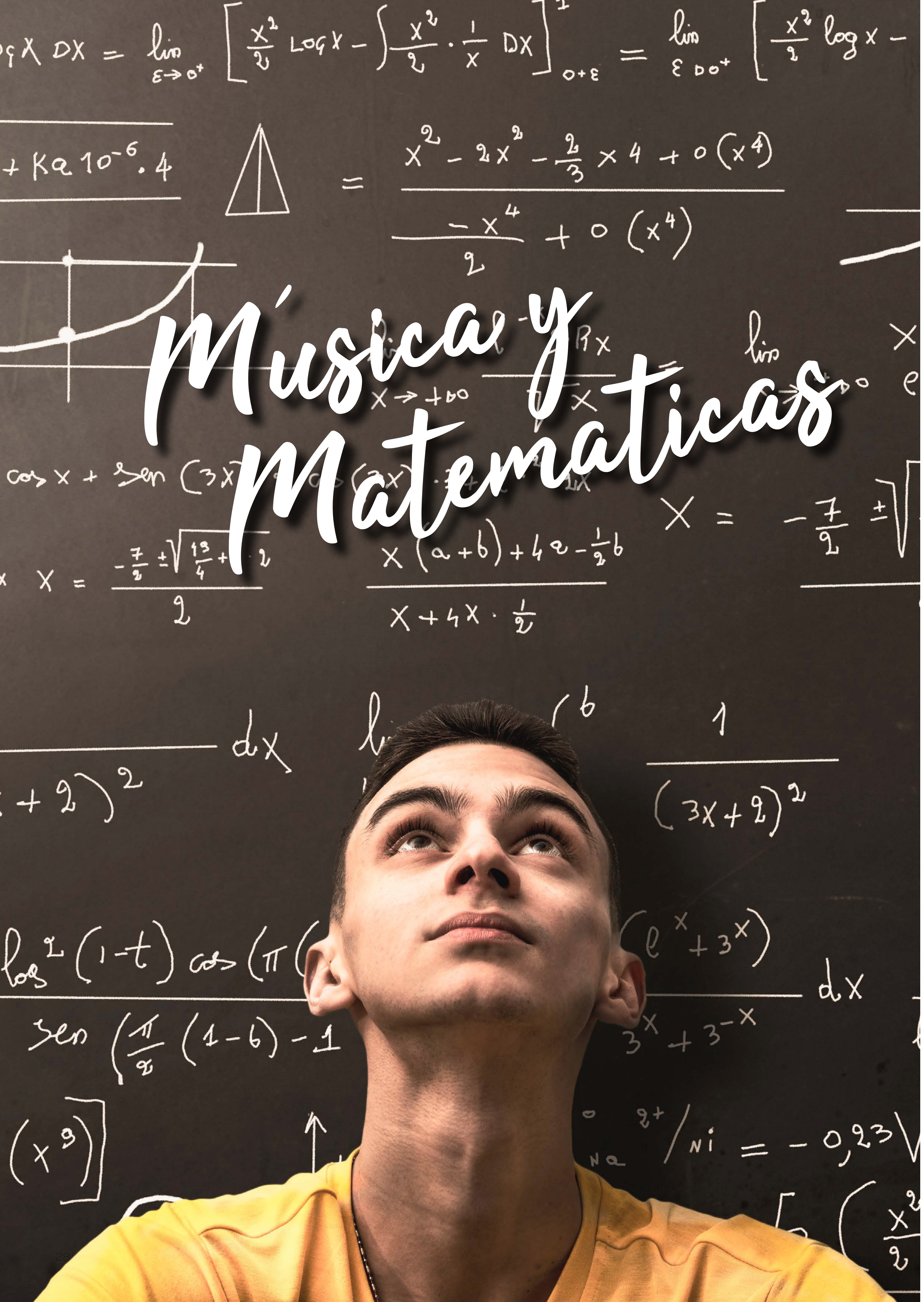
Enlaces a interpretaciones de las obras citadas:
Johannes Ockeghem: "Misa Prolationum": https://www.youtube.com/watch?v=UPBxSbM9cSo&t=205s
Claude Debussy: "Des pas sur la neige": https://www.youtube.com/watch?v=4PmyEmGs_EA
Karlheinz Stockhausen: "Klavierstucke IX": https://www.youtube.com/watch?v=wqzZfMzba5I&t=13s

Gonzalo Navarro García,
Compositor.
Profesor del Conservatorio Superior de Badajoz ``Bonifacio Gil´´. Premio ``Carmelo Alonso Bernaola´´ en la XXVII edición del ``Premio Jóvenes Compositores Fundación SGAE-CNDM´´

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

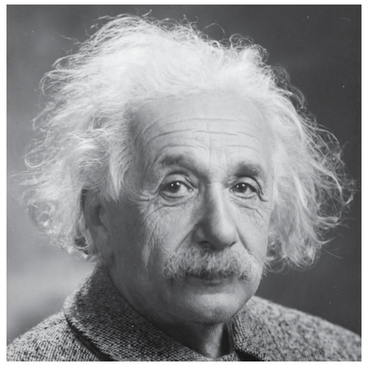
Pacioli, Luca. 2008. La divina proporción. Akal.
Tannenbaum, Mya. 1988. Stockhausen: Entrevista sobre el genio musical. Turner.





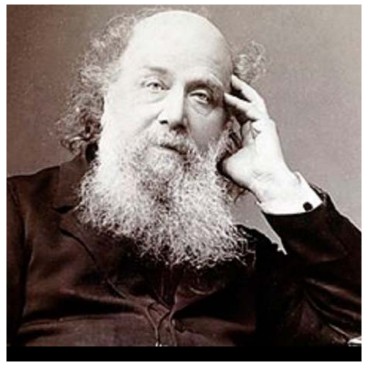
DOÑANA UNIVERSAL

Grandes citas.



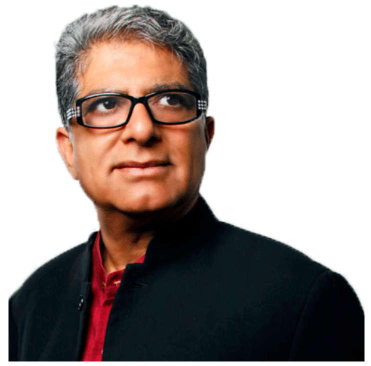
Albert Einstein

Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas



James Joseph Sylvester

Las matemáticas son la música de la razón.



Deepak Chopra

Las matemáticas expresan valores que reflejan el cosmos, incluyendo el orden, equilibrio, armonía, lógica y belleza abstracta.

LA MÚSICA PARA ENTENDER LAS MATEMÁTICAS Y NO PARA AMENIZAR SU APRENDIZAJE. LA IMPORTANCIA DE LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA MUSICALMENTE MOTIVADA Y VICEVERSA.

Es cierto que la música influye en las emociones y las emociones en los procesos de aprendizaje. No obstante, no es menos ciertos que, por desconocimiento, los docentes utilizan la música para crear un contexto agradable en el desarrollo de sus clases, creyendo erróneamente que con ello optimizará el rendimiento del alumnado.

Autores como Lozano y Lozano (2007) o Rauscher, Shaw y Ky (1993) defienden las bondades de la música para el aprendizaje, argumentando que un contexto emocional adecuado puede influir positivamente en nuestra conducta. Rauscher y sus colaboradores (1993) documentaron la vinculación de la música y las matemáticas, específicamente con tareas de "razonamiento espacial", demostrando que escuchar -quince minutos- una sonata de Mozart antes de la tarea, esta se desempeñaba con mayor rapidez. A este fenómeno lo llamarían el Efecto Mozart.

Resulta paradójico que este efecto se denominara Efecto Mozart y no Efecto Música. Esto es debido a que cuando se replicaba este experimento con otra música, por ejemplo con la de Philip Glass, no se registraba mejora alguna, posiblemente debido a las preferencias musicales o las experiencias previas del alumnado con las diferentes composiciones.

Partimos de la consideración que las emociones no son más que conductas involuntarias, por tanto, son muy difícil gestionarlas (al igual que no controlamos los latidos del corazón o el parpadeo) y para su control hace falta cambios ambientales. En este sentido, hay que tener mucho cuidado y un amplio conocimiento en materia conductual para evitar problemas que subyacen de la contingencia "Contexto" (música en clases de matemáticas) y "Emoción".

Uno de los mayores problemas que adolecen el alumnado, y que argumenta sus malos resultados, es la llamada Ansiedad Numérica, o ansiedad derivada de las matemáticas (Hambree, 1990; Ashcraft y Kirk, 2001). Si la asignatura de matemáticas va precedida de música, el alumnado puede automatizar que "la música en el aula es sinónimo de la ansiedad" y que emerja esta emoción con solo escucharla. Además, la música es un potente distractor si se recurre a ella de forma puntual. Debemos tener cuidado, pues la música en el aprendizaje motiva cuando no agita (Luque, Matas y Aranda, 2018) y ser cauto en su uso si este no está justificado como complemento a una explicación o como ejemplos para aclarar o describir una actividad.

Se ha demostrado que la música disminuye el rendimiento académico (Anderson y Fuller, 2010; Christopher y Shelton; 2017; Drai-Zerbib y Baccino, 2017) debido la reducción atencional. Esta disminución en el rendimiento académico en presencia de la música aumenta cuando el alumnado está realizando una prueba o examen (Luque, Matas y Aranda, 2018).

Si de verdad queremos que nuestros alumnos tengan éxitos en matemáticas y aumenten su rendimiento académico, dejemos de amenizar con canciones el aula y orientemos, motivemos y facilitemos los recursos al alumnado para que adquieran una formación musical.

A nivel neurofisiológico, una formación musical proporciona muchísimos beneficios. Esta aporta un fortalecimiento de sinapsis entre neuronas, una mejora de la memoria y un aumento del tamaño del cuerpo calloso -nexo de ambos hemisferio- (Weinberger, 1998; Begley, 2000; Cox y Stephens, 2006).

Respecto al procesamiento de la música y las matemáticas, muchos investigadores han descrito la existencia de una lateralidad hemisférica: el derecho para la música, la creatividad, lo onírico, etc. y el izquierdo para los procesamientos matemáticos, la lectura, la comprensión lógica, etc. (Szirony, Burgin y Carolyn-Pearson, 2018; Ornstein, 1997), además de proponer que dicha lateralidad condiciona nuestra personalidad y nuestras capacidades debido a la "dominancia hemisférica" (Chesson y Munday, 1993).

Se ha demostrado que la actividad cerebral y el rendimiento es diferente entre los alumnos con una educación musical y los que no, constatado a través de pruebas conductuales y de neuroimagen durante la resolución de cálculos matemáticos. Schmithorst y Holland (2004) estudiaron dicha activación cerebral durante la resolución mental de una suma de fracciones en músico y no músicos. Hallaron una mayor actividad del Giro Fusiforme y la Corteza Prefrontal (ambos en el hemisferio izquierdo) en los músicos. En cambio, para los no músico, la activación se desarrollaría en el Lóbulo Parietal, el Giro Occipital Inferior del hemisferio derecho, el Giro Occipital Medial el hemisferio izquierdo y el Giro Orbital del hemisferio derecho.

Estos Investigadores determinaron que la formación musical capacita al alumnado para un mayor procesamiento de la información, a nivel semántico y visual. En este sentido, una menor activación de regiones, cuya función es la asociación visual, es debido a que la música emplea una forma visual más abstracta, particularmente en la representación de las fracciones, conduciendo a un mayor rendimiento matemático. Además, los músicos poseen un mayor rendimiento en la memoria de trabajo relacionado con la resolución de conflicto, pues estos poseen gran experiencia al estar constantemente corrigiendo conflictos en sus interpretaciones musicales (Schmithorst y Holland, 2004).

La música se encuentra en las matemáticas y viceversa. En este sentido, elementos musicales, armonías y melodías se puede encontrar en los sistemas matemáticos, a través de la existencia de relaciones horizontales y verticales (Nisbet, 1991). Ambas disciplinas son en esencia abstractas, se escriben en una notación universalmente aceptada, son absolutamente precisas y comparten una jerarquía interna que define su contenido (Coxeter,1968).

Enseñar matemáticas integradas con la música no solo mejora la actitud de los estudiantes hacia el aprendizaje matemático, también aumenta el logro matemático de alumnado. En este sentido, se le está proporcionando al estudiante la oportunidad de analizar las matemáticas, o la música, y comprender los conceptos en un contexto significativo (An, Tillman, Boren y Wang, 2014). Ejemplo de ello lo encontramos en la adquisición de habilidades geométrica a través de la música o a la diferenciación de estilos dentro del flamenco -palos- a través de la geometría, debido a la similitud cognitiva interdisciplinar (Spelke, 2008; Díaz-Báñez, 2017).

Queda demostrado que el estudio musical permite un mayor rendimiento de trabajo en la resolución de problemas matemático (Schmithorst y Holland, 2004) y, por consiguiente, se reduce la ansiedad numérica debido a la existencia de una correlación significativa entre una baja capacidad de memoria de trabajo y una alta ansiedad numérica (Ashcraft y Kirk, 2001).

El conocimiento se optimiza con más conocimiento. Una buena propuesta es la instrucción matemática musicalmente motivada, facilitar al alumnado los recursos para que adquieran un conocimiento musical exhaustivo y de calidad y evitar la tentación de amenizar con música las clases cuando no está justificada la presencia de esta o no nos sirva como recurso didáctico para complementar una explicación.

Francisco José Pérez Díaz.
Doctor en Psicología por la Universidad de Sevilla.
Investigador en el LAB&N
(Laboratory of Animal Behavior and Neuroscience)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

An, S. A., Tillman, D. A., Boren, R. y Wang, J. (2014). Fostering elementary students' mathematics disposition through music-mathematics integrated lessons. International Journal for Mathematics Teaching & Learning, 1-19.
Anderson, S. A. y Fuller, G. B. (2010). Effect of music on reading comprehension of junior high school students. School Psychology Quarterly, 25(3), 178–187
Ashcraft, M. y Kirk, E. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. Journal of Experimental Psychology: General, 130(2), 224-237.
Begley, S. (2000). Music on the mind. Newsweek, 136.
Chesson, D. y Munday, R. (1993). Hemispheric preferences for problem solving in a group of music majors and computer science. Journal of Instructional Psychology, 20(2), 145–150.
Christopher, E. A. y Shelton, J. T. (2017). Individual Differences in Working Memory Predict the Effect of Music on Student Performance. Journal of Applied Research in Memory and Cognition, 6 (2), 167-173.
Cox, H. y Stephens, L. (2006). The effect of music participation on mathematical achievement and overall academic achievement of high school students.International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 37(7), 757-763.
Coxeter, H. (1968). Music and mathematics. The Mathematics Teacher, 61(3), 312-320.
Díaz-Báñez, J. M. (2017). Mathematics and Flamenco: An Unexpected Partnership. The Mathematical Intelligencer, 39 (3), 27-39.
Drai-Zerbib, V. y Baccino, T. (2017). Effets On-Line d'un environnement musical dans la lecture de texte: Analyse oculométrique [On-Line effects of musical environment on text reading: Eye-tracking investigation]. Psychologie Française, 62(3), 233-247.
Hembree, R. (1990). The nature, effect, and relief of mathematics anxiety. Journal for Research in Mathematics Education, 21(1), 33-46.
Lozano, L. y Lozano, A. (2007) La influencia de la música en el aprendizaje. Memorias del IX Congreso Nacional de Investigación Educativa. Mérida, México.
Luque, M. J., Matas, A. y Aranda, L. (2018). Efecto de la música agradable y no elegida en la Memoria de Trabajo y rendimiento académico bajo una tarea aritmética. Conferencia. Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa (CIMIE)
Nisbet, S. (1991). Mathematics and music. Australian Mathematics Teacher, 47(4), 4-8.
Ornstein, R. (1997). The right mind. Orlando: Harcourt Brace.
Rauscher, F. H., Shaw, G. L. y Ky, K. N. (1993). Music and spatial task performance. Nature, 365, 611.
Schmithorst, V. y Holland, S. (2004). The effect of musical training on the neural correlates of math processing: a functional magnetic resonance imaging study in humans. Neuroscience Letters, 354, 193-196.
Spelke, E. (2008). Effects of music instruction on developing cognitive systems. Learning, Arts and the Brain. New york, NY: Dana Press.17-50
Szirony, G.M., Burgin, J.S. y Carolyn-Pearson, L. (2018). Hemispheric laterality in music and math. Learn Inq, 2, 169-180
Weinberger, N. (1998). The music in our minds. Educational Leadership, 56, 36-40.

ENTENDER CON EL OÍDO, ESCUCHAR CON LA RAZÓN

Según Un día escuchas una melodía. De repente acapara toda tu atención. Te atrapa. Todos tus sentidos deciden atenderla. Tu cerebro cree adivinar la nota que sonará justo después. Y es entonces cuando se produce la magia: predices y escuchas simultáneamente.

Y entonces decides que eres una enamorada de la música. Que formará parte de ti el resto de tu vida.

Y tienes hambre de más, cada vez de más. Y empiezas a querer reproducir canciones en todo tipo de instrumentos, todos los que se van poniendo en tus manos, ahí, a tu alcance. Como una droga. Y luego, cuando ya tienes habilidad con las notas y sientes que juegas con ellas, pretendes crear tus propias melodías, tus propias canciones.

Y tu mayor deseo es acariciar ese piano, esa flauta, esa guitarra, que sacian tu hambre. Esos que saben como nadie provocarte satisfacción cuando reproducen lo que sonaba virgen en tu cabeza, mucho antes de que tu oído pudiese percibirlo en forma de música.

El tiempo pierde su espacio y el espacio su tiempo. Y te envuelve sin darte cuenta, para permitirte crear música y sólo te deja volver a tener conciencia sobre él cuando alguien o algo, ajeno a ti, requiere tu atención.

Mientras más difícil sea la melodía que persigues, más satisfacción te produce cuando consigues combinar las notas justas para crearla y reproducirla para tus oídos, fiel a lo que tu mente había creado.

Y entonces ya la música se convierte en un fin en sí misma. Sin tener que justificar a cada paso para qué la creas. Simplemente disfrutas de su belleza, por su ser único y elegante.

Es precisamente lo mismo que siento con las Matemáticas.

Un día descubres una teoría. De repente acapara toda tu atención. Te atrapa. Todos tus sentidos deciden atenderla. Tu cerebro cree adivinar la propiedad que se demostrará justo después. Y es entonces cuando se produce la magia: predices y descubres simultáneamente.

Y entonces decides que eres una enamorada de las Matemáticas. Que formará parte de ti el resto de tu vida.

Y tienes hambre de más, cada vez de más. Y empiezas a querer demostrar afirmaciones e hipótesis de todo tipo, todas las que se van poniendo en tu pensamiento, ahí, a tu alcance. Como una droga. Y luego, cuando ya tienes habilidad con los teoremas y sientes que juegas con ellos, pretendes crear tus propias afirmaciones, tus propias teorías.

Y tu mayor deseo es disponer de esos axiomas, esos resultados, esos que necesitas para saciar tu hambre. Esos que saben como nadie provocarte satisfacción cuando demuestran lo que era una idea virgen en tu cabeza, mucho antes de que tu razón pudiese demostrarlo en forma de teorema.

El tiempo pierde su espacio y el espacio su tiempo.

Y te envuelve sin darte cuenta, para permitirte crear matemáticas y sólo te deja volver a tener conciencia sobre él cuando alguien o algo, ajeno a ti, requiere tu atención.

Mientras más difícil sea la idea que persigues demostrar, más satisfacción te produce cuando consigues combinar las proposiciones que se concatenan en el orden adecuado para explicarla y reproducirla en tu entendimiento, fiel a lo que tu mente había intuido.

Y entonces ya las matemáticas se convierten en un fin en sí mismas. Sin tener que justificar a cada paso para qué la creas. Simplemente disfrutas de su belleza, por su ser único y elegante.

No sabría decir qué me produce más admiración, si la una o la otra. O las dos a la vez. Juntas.

Dedico mi tiempo a ambas, por trabajo y profesión y por puro placer. Combinar las dos y buscar fines comunes se presenta como uno de mis mayores retos. Porque cada día puedo observar en mis alumnos el efecto positivo y casi hipnótico que provoca en ellos este mágico par. Música y Matemáticas. Matemáticas y Música.

Una para la otra, en ambas direcciones. Se alimentan, se complementan y se alían para forjar un vínculo que les servirá de inspiración para estimular la creatividad de pensamiento y las emociones. Algo que, a mi parecer, enriquece soberanamente la inteligencia humana. Y al mismo tiempo, esta pareja de música y matemáticas se presenta como la unión de dos seres complementarios: la austeridad frente al romanticismo, la belleza fría y exhaustiva frente a la emoción, pero ambas creadas desde la más profunda pasión.

Es precisamente eso lo que las hace tan valiosas y bellas.

Estoy cada vez más convencida de que ser admiradas y amadas no depende de quien las observe, sino de quien las enseñe. De la pasión con la que se tocan las teclas de la verdad, de la delicadeza y sensibilidad con la que se dejen vibrar las notas y las preguntas en el tiempo.

Y si se muestran con la misma pasión y admiración que se siente por ellas, el que escucha la melodía ya no podrá dejar de contemplar su belleza. Y quién sabe, podría ser cautivo también de esas ganas de perseguirlas, contagiado de ese ímpetu por crear, por saber más y por disfrutar de ellas, para el resto de sus días.

Rocío López Ramos
Licenciada en Matemáticas (Universidad de Sevilla),
Profesora de Matemáticas en el IES Doñana de Almonte.

MATEMÁTICAS Y MÚSICA: JUNTAS Y REVUELTAS. EXPERIENCIAS EN EL AULA

Especialmente en estos tiempos que corren, parece que las Matemáticas van cobrando su popularidad, más allá de la comunidad científica, y se le reconoce -además de como la madre de cualquier ciencia y como ciencia en sí misma-, su aportación a otras ciencias y su estrecha relación con otras disciplinas. Pero el binomio que consolida la verdadera pareja de moda es: Matemáticas y Música. Son muchas las aportaciones e investigaciones científicas de las que tenemos constancia y que nos aportan conocimientos y curiosidades sobre la influencia que tiene una sobre la otra.

Sin embargo, desde el ámbito docente, a mi parecer, esta relación entre ambas disciplinas ha de ponerse de manifiesto. Para disfrutarlas juntas, se necesita que esta simbiosis se materialice, que se concrete en forma de actividades o experiencias reales. Esa es la mejor manera de llevarlas al aula y desarrollarlas con el alumnado, para así poder nutrir a nuestra comunidad educativa de esa unión mágica y atractiva, que despierta, como poco, la creatividad, el pensamiento abierto y reflexivo, y la capacidad de disfrutar, a través de la disciplina matemática, de otras artes.

Y en este aspecto, me he sentido atraída siempre por crear, desarrollar la imaginación y trabajar para diseñar actividades que aporten conocimientos matemáticos, al mismo tiempo que diviertan, cautiven y estimulen al alumnado, haciéndoles disfrutar en el camino. Se trata de aprender con las emociones. Adentrarse en los conocimientos a través de ellas.

Al final, lo más reconfortante para profesor y alumno es el aprendizaje mutuo, la estimulación y motivación mutuas. Porque estoy cada vez más convencida de algo:

La pasión en lo enseñado se traduce en la admiración por lo aprendido.

A continuación, expongo y comparto algunas de las experiencias llevadas a cabo con mis alumnos en el aula. De ellas, he seleccionado algunas que están más relacionadas con la música o la poesía. Todas ellas tienen por objetivo principal consolidar conceptos matemáticos básicos, pero de una manera atractiva, diferente, divertida y emocionante.

Desde aquí animo a todos aquellos docentes que lean estas líneas a que compartan estas actividades y que las pongan en práctica con su alumnado. Están totalmente adaptadas para que puedan usarse en diferentes niveles educativos, desde Primaria, ESO o Bachillerato. Pero no sólo a ellos, también a cualquier lector que tenga ganas de pasar un rato divertido aprendiendo un poquito de Matemáticas, tenga o no formación o estudios. Están al alcance de todos los públicos y la diversión está asegurada:

Matemáticas por Sevillanas

Esta actividad nos permite hacer un recorrido por algunos conceptos básicos de Matemáticas, cantados y explicados al compás de sevillanas. Se preparó para celebrar en nuestro IES Doñana de Almonte el día Internacional de las Matemáticas.

Los alumnos, después de escuchar y ver el vídeo, se animaron a crear sus propias letras de sevillanas matemáticas, demostrando además sus dotes de poetas flamencos. Desmontamos así también el mito de que aquello de "Letras y Ciencias" no está tan reñido como se piensa.

El video se puede visualizar en el enlace https://youtu.be/GjQJ6hXtfJQ

Teatro Musical "Sin Pi no soy nada"

Esta actividad no sólo fue un éxito cuando la llevamos a cabo en el centro, sino que, además, un año más tarde, recibió el Primer Premio, en el ámbito docente, en el conocido concurso Pi Day Spain, (https://www.piday.es/) en 2018, celebrado ese año en Salamanca.

Dicho certamen está organizado cada año por la Real Sociedad Matemática Española, La Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y la Fundación Descubre, para conmemorar el día del Número Pi (14 de marzo, que en orden anglosajón 03-14, coincide con la aproximación más usada de dicho número).

La obra de teatro cuenta la "historia de amor" entre una circunferencia y su amado número , sin el que ella no puede existir. Con esta canción escenificada conocemos propiedades del número irracional Pi, sus orígenes, sus aplicaciones, las distintas aproximaciones que se han hecho a lo largo de la historia, etc.

El enlace es https://youtu.be/vIfsG2wsPS8

Letra y voz: Rocío López Ramos.
Canción versionada de la original "Sin ti no soy nada", de Amaral.
Interpretado por alumnos de 1º ESO del IES Doñana de Almonte. Curso 2016-17.

Criba de Eratóstenes en Vivo

Es una actividad que estaba preparada para ser llevada a cabo en el instituto en el tercer trimestre de este curso. Desafortunadamente, por el cese de las clases presenciales debido a la pandemia del Covid-19, nos ha sido imposible realizarla por completo, aunque sí se ha preparado ya mucho material. Esperamos retomarla en el próximo curso, en la medida de lo posible.

Está pensada para los alumnos de 1º de ESO, donde ellos mismos jugarían el papel de números, del 1 al 100. Situados en las 100 casillas de una cuadrícula que se estaba pintando en el patio del centro para tal fin, realizaríamos en vivo el procedimiento que ideó Eratóstenes en el siglo III a. C. para ir seleccionando los números primos de una manera fácil y entretenida.

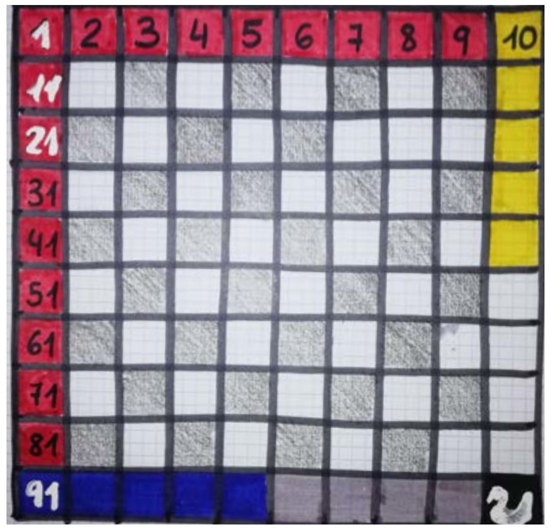
Mientras, describiríamos el procedimiento con la lectura del siguiente poema, que compuse para celebrar la actividad:

Criba de Eratóstenes

Los números hay que tratar
con cariño y mucho mimo
queremos determinar
cuáles son aquellos primos
de entre unos 100, nada más.
Te explico en un momentito
antes de seguir hablando
qué tipo de numeritos
son los que estamos buscando:
Primo es ese que no tiene
más divisores que un par:
el uno, que lo entretiene
y él mismo, 'pa' variar.
Siempre está ese graciosillo
que te suelta la ironía:
maestra, éste es mi primo
que es el hijo de mi tía.
Lo utilizan en los bancos
claves de seguridad
pues el patrón que ellos siguen
¡¡Es difícil de sacar!!
Si algún día consiguieran
descifrar su formación
pondrían grandes vidrieras
con tan bella sucesión.
Eratóstenes contó
cómo usaba él su criba
pues prestad aquí atención
y el que quiera que lo escriba,
¡salen primos al montón!
Primero las parejitas
que son múltiplos de dos

¡A deshojar margaritas
que lo vuestro es el amor!
De tres en tres van ahora
marchándose con sofoco
no se enfade usted, señora,
que usted no es prima tampoco.
Múltiplos de 4 fueron
saliendo cual pelotón
pues ellos dos veces vieron
una potencia de dos.
De los múltiplos de cinco
los del cero se han marchado
pues el dos con mucho ahínco
a pares se los ha llevado.
Salgan entonces ustedes
los que con 5 terminan
pónganse junto a los pares
que por decenas caminan.
Los de 6 ya no hace falta
que se vayan otra vez
pues se han ido con los pares
que eran múltiplos de 3.
Ahora les toca salir
a los múltiplos de 7
pues prepárense a servir
de factores un banquete.
Y los que habéis conseguido
esta criba superar
enhorabuena yo os digo
¡¡Sois los primos de verdad!!
Habéis ganado la batalla
de divisibilidad.

Preparación del suelo para diseñar la Criba en el patio del instituto.



Boceto en papel de la Criba a pintar en el patio del IES Doñana.

Plantilla de madera, realizadas a mano por Moisés (Profesor de Tecnología), para dibujar los números en la cuadrícula.

Rap de las Áreas

Como muchas otras letras que hemos compuesto con contenidos matemáticos, ésta es otro ejemplo, esta vez, en forma de rap. Usamos ahora la música como regla mnemotécnica. Permite recordar las fórmulas de las áreas de las figuras planas más relevantes, de una manera pegadiza y divertida:

El cuadrado de su lado
es el área del cuadrado,
su nombre te lo dice
¿Es que no lo habías pensado?
Si quieres del rectángulo
su área calcular
te digo con premura
debes multiplicar
su base por su altura.
Si lo partes por dos
la del triángulo te dio.
¿Qué te falta del tema?
¡Ah sí, el de la apotema!
Polígono regular
su área a calcular:
su perímetro lo tienes

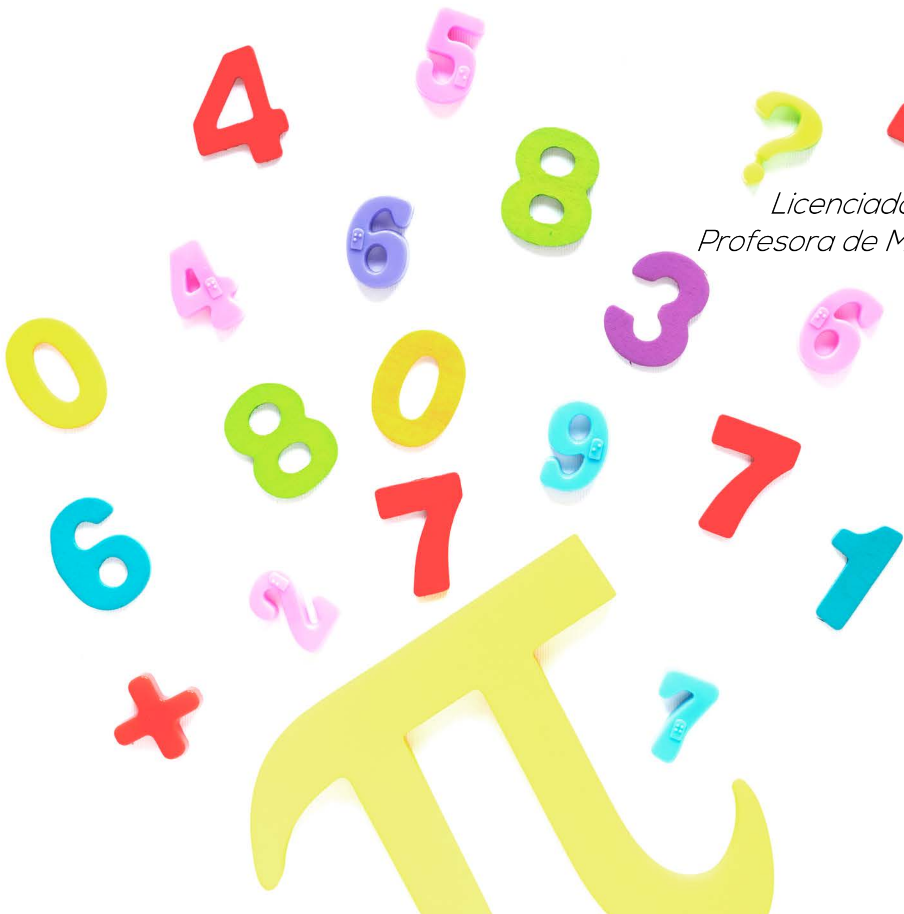
que multiplicar
por su apotema a la mitad.
Un rombo es un cuadrado
estirado en diagonal
multiplícate esas dos
y le hallas la mitad.
Pi por r al cuadrado
la del círculo te he dado.
Y ¿qué hay de diferencia
con la circunferencia?
¿Quieres saberlo tú?
Pues que ella solo puede
medir su longitud,
y es dos por Pi por r,
con exactitud.

Por último, me gustaría hacer una reflexión, en la que inspiro mi quehacer docente, y que no es más que una versión personal de un antiguo proverbio, del pensador chino Confucio:

"Lo que te despierta curiosidad, lo investigas.

Lo que trabajas con diversión, lo recuerdas.

Si, además, consigues emocionarte, lo aprendes y nunca lo olvidas."



Rocío López Ramos
Licenciada en Matemáticas (Universidad de Sevilla),
Profesora de Matemáticas en el IES Doñana de Almonte.

www.AFCAL.org

AFCAL

Asociación para el Fomento del Conocimiento en Almonte